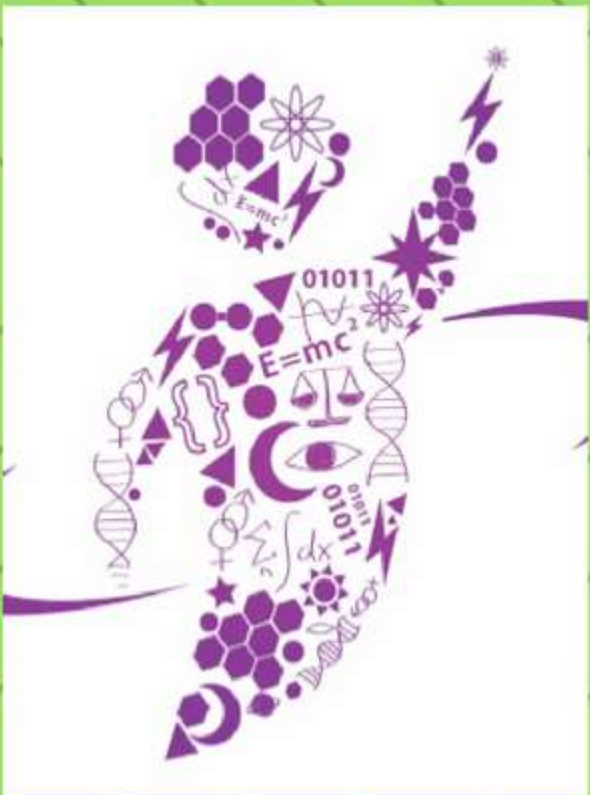
PAKET 8

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

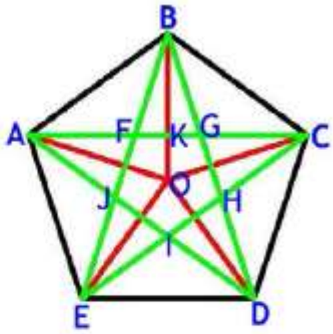
@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 8

1. Misalkan $n_1, n_2, n_3, \cdots$ bilangan-bilangan asli yang membentuk barisan aritmatika. Banyaknya nilai di himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ yang mungkin menjadi nilai $n_{n2} - n_{n1}$ adalah ...
   a. 11
   b. 21
   c. 31
   d. 41
   Solusi:
   Misalkan $n_1 = a$ dan beda barisan aritmatika tersebut adalah b dengan $a, b > 0$.
   $n_{n2} - n_{n1} = n_{a+b} - n_a = a + (a + b - 1)b - (a + (a - 1)b) = b^2$
   karena $31^2 < 1000 < 32^2$ maka banyaknya nilai yang mungkin dari $n_{n2} - n_{n1}$ adalah 31

2. Pada segilima beraturan ABCDE, diagonal-diagonalnya berpotongan di F, G, H, I dan J. Misalkan S_1 menyatakan luas segilima ABCDE dan S_2 menyatakan luas segilima FGHIJ. Jika $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m-\sqrt{n}}{k}$, dengan k, m, n bilangan bulat positif dan n tidak memiliki faktor kuadrat selain 1, maka nilai dari $k + m + n$ adalah ....
   a. $\frac{3+5\sqrt{7}}{2}$
   b. $\frac{5+3\sqrt{7}}{2}$
   c. $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$
   d. $\frac{3+7\sqrt{5}}{2}$
   Solusi:
   $cos\ 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\ cos\ \alpha$
   $\sin(36°) = \sin(90° - 54°) = \cos 54°$
   $2\ sin\ 18°\ cos\ 18° = 4\cos^3 18° - 3\ cos\ 18°$
   $2\ sin\ 18° = 4 - 4\sin^2 18° - 3$
   $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$
   $sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



$\angle AOB = \frac{360°}{5} = 72°$ sehingga $\angle ABC = 108°$

Maka $\angle BAC = 36°$

$\frac{AC}{AB} = \frac{sin108°}{sin36°} = \frac{sin72°}{sin36°} = 2cos36°$

$\angle ABK = 54°$ sehingga $\angle FBK = 54° - 36° = 18°$

$\frac{FG}{AC} = \frac{FK}{AK} = \frac{tan18°}{tan54°} = \frac{sin18o}{cos18o} \cdot \frac{sin36°}{cos36°}$

$\frac{FG}{AB} = \frac{2 \cdot sin18° \cdot sin36°}{cos18°} = (2 \cdot sin18°)^2$

Segilima ABCDE dan FGHIJ sebangun maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai kuadrat perbandingan sisi-sisinya.

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AB}{FG}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot sin18o}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

∴ Jadi, nilai $\frac{S_1}{S_2}$ adalah $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

3. Untuk sembarang bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x . Bilangan rasional negatif a dan b dikatakan couple jika memenuhi

$$\lfloor ab \rfloor^2 + \lfloor a + b - 1 \rfloor^2 = 100$$

Bilangan bulat terkecil N yang memenuhi $\lfloor a^2 + b^2 \rfloor \leq N$ untuk setiap couple a dan b adalah ….

a. 36
b. 37
c. 38
d. 39

Solusi:

Karena a dan b bilangan rasional negative, maka ada dua kasus yang memenuhi, yaitu :

Kasus 1 :

$\lfloor ab \rfloor^2 = 36 \rightarrow ab = 6$

Maka $6 \leq ab < 7$

$\lfloor a + b - 1 \rfloor^2 = 64$

$\rightarrow \lfloor a+b-1 \rfloor = -8$
$\rightarrow\ -8 \leq a+b-1 < -7$
$\rightarrow\ -7 \leq a+b < -6$
$\rightarrow 36 < (a+b)^2 \leq 49$

- $\lfloor a^2+b^2 \rfloor = \lfloor (a+b)^2 - 2ab \rfloor \leq (49) - 2(6) = 37$
- $\lfloor a^2+b^2 \rfloor = \lfloor (a+b)^2 - 2ab \rfloor > (36) - 2(7) = 22$

Maka dapat ditulis:
$22 < \lfloor a^2+b^2 \rfloor \leq 37$
Untuk kasus ini, $N\ =\ 37$
Terjadi ketika $a+b\ =\ -7$ dan $ab\ =\ 6$
Maka $a\ =\ -1$ dan $b\ =\ -6$

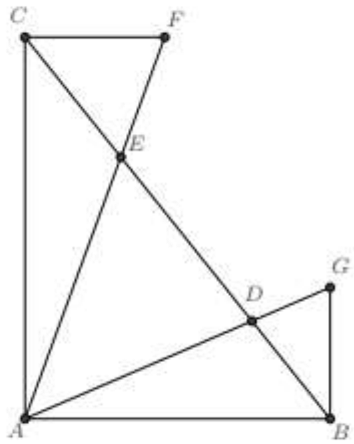
Kasus 2:
$\lfloor ab \rfloor^2 = 64 \rightarrow ab = 8$
Maka $8 \leq\ ab <\ 9$
$\lfloor a+b-1 \rfloor^2 = 36$
$\rightarrow \lfloor a+b-1 \rfloor = -6$
$\rightarrow\ -6 \leq a+b-1 < -5$
$\rightarrow\ -5 \leq a+b < -4$
$\rightarrow 16 < (a+b)^2 \leq 25$

- $\lfloor a^2+b^2 \rfloor = \lfloor (a+b)^2 - 2ab \rfloor \leq (25) - 2(8) = 9$
- $\lfloor a^2+b^2 \rfloor = \lfloor (a+b)^2 - 2ab \rfloor > (16) - 2(9) = -2$

Maka dapat ditulis:
$-2 < \lfloor a^2+b^2 \rfloor \leq 9$
Untuk kasus ini, $N\ =\ 9$
Terjadi ketika $a+b\ =\ -5$ dan $ab\ =\ 8$
$ab = 8$
$a(-5-a) = 8$
$-5a - a^2 - 8 = 0$
$a^2 + 5a + 8 = 0$
Cek Diskriminan $D\ =\ 25 - 32\ =\ -7$ ($Tidak\ memenuhi$)
Maka bilangan bulat terkecil N yang memenuhi adalah 37

4. Segitiga ABC mempunyai panjang sisi AB = 20, AC = 21 dan BC = 29. Titik D dan E terletak pada segmen garis BC, dengan BD = 8 dan EC = 9. Besar ∠DAE adalah ... derajat.
   a. $15°$
   b. $30°$
   c. $45°$
   d. $60°$

Solusi:
Buat garis melalui B sejajar AC yang memotong perpanjangan AD di G. Demikian pula, buat garis melalui C sejajar AB yang memotong perpanjangan AE di F, seperti gambar berikut



Dengan memanfaatkan kesebangunan antara ΔBDG dan ΔADC diperoleh
$BG =$
$\frac{8}{21} \times 21 = 8$. Dengan cara serupa diperoleh pula CF = 9. Misalkan $\angle CAF = \beta$ dan $\angle BAG = \alpha$. Maka diperoleh
$tan\ \alpha = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ dan $tan\ \beta = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$
sehingga didapat
$tan\ \angle DAE = tan(90 - (\alpha + \beta))$
$tan\ \angle DAE = cot(\alpha + \beta))$
$tan\ \angle DAE = \frac{1}{tan(\alpha + \beta)}$
$tan\ \angle DAE = \frac{1 - tan\ \alpha\ tan\ \beta}{tan\ \alpha + tan\ \beta}$
$tan\ \angle DAE = \frac{1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}$
$tan\ \angle DAE = \frac{35 - 6}{14 + 15}$
$tan\ \angle DAE = 1$
Jadi, $\angle DAE = 45°$

5. Diketahui barisan bilangan real $a_1, a_2, \ldots , a_n, \ldots$ merupakan barisan geometri. Jika $a_1 + a_4 = 20$, maka nilai minimal dari
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
adalah ….
a. 12
b. 13
c. 14

d. 15

Solusi:

Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots$ merupakan barisan geometri dengan rasio r dan

$a_1 = a$

$a_1 + a_3 = a(1 + r^3) = 20$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = a(r^3+1)(r^2+r+1) = 20(r^2 + r + 1)$

Karena $(Ax^2 + Bx + C)_{min} = \frac{4AC-B^2}{4A}$ untuk $A > 0$ maka $(r^2 + r + 1)_{min} = \frac{3}{4}$

Maka nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$

$\therefore$ Jadi, nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah 15

6. Pada suatu limas segitiga ABCD, semua sisinya bentuknya sama, yaitu segitiga sama sisi dengan panjang sisi 3 satuan. Misalkan X adalah titik tengah BC dan Y adalah titik pada rusuk AD sehingga AY = 2 YD. Seekor semut berjalan di permukaan limas ABCD dari X ke Y. Jarak terdekat yang bisa ditempuh sang semut adalah ....

a. $\frac{1}{2}\sqrt{31}$

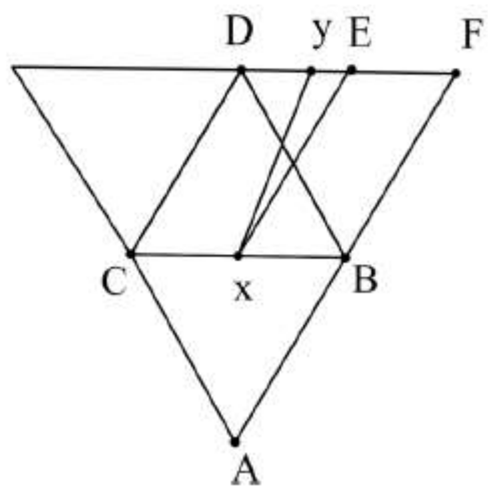
b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\frac{1}{31}\sqrt{2}$

d. $\frac{1}{31}\sqrt{31}$

Solusi:

Buat jaring-jaring limas , seperti gambar berikut :



$BF = XE = 3$

$XB = \frac{3}{2}$

$YE = \frac{1}{2}$

$\angle XEY = 60°$
Dengan aturan cosinus didapat,
$XY^2 = XE^2 + YE^2 - 2.XE.YE.\cos 60°$
$XY^2 = 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (2)(3)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
$XY^2 = \frac{31}{4}$
$XY = \frac{1}{2}\sqrt{31}$

7. Banyaknya semua bilangan bulat n yang memenuhi

$$p(n) = \frac{n^8 + n^7 + n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2017}{n^2 - n + 1}$$

bulat adalah ….
a. 1
b. 2
c. 4
d. 6

Solusi:
$n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$
Maka $n^2 - n + 1$ membagi $n^3 + 1$
Misalkan $y = n^8 + n^7 + n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2017$
$y = n^5(n^3 + 1) + n^4(n^3 + 1) + n^3(n^3 + 1) + n^2(n^3 + 1) + n(n^3 + 1) + n^3 + 1 + n^2 - n + 1 + 2015$
Maka haruslah $n^2 - n + 1$ membagi 2015
$n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
Maka $n^2 - n + 1 \geq 1$
Ada 8 kasus :
· Jika $n^2 - n + 1 = 1$
Maka $n = 0$ atau $n = 1$
· Jika $n^2 - n + 1 = 5$
Tidak ada n bulat yang memenuhi
· Jika $n^2 - n + 1 = 13$
Maka $n = 4$ atau $n = -3$
· Jika $n^2 - n + 1 = 31$
Maka $n = 6$ atau $n = -5$
· Jika $n^2 - n + 1 = 65$
Tidak ada n bulat yang memenuhi
· Jika $n^2 - n + 1 = 155$
Tidak ada n bulat yang memenuhi.

· Jika $n^2 - n + 1 = 403$
Tidak ada n bulat yang memenuhi.
· Jika $n^2 - n + 1 = 2015$
Tidak ada n bulat yang memenuhi.
∴ Jadi, semua n bulat yang memenuhi adalah $-5, -3, 0, 1, 4, 6$ yaitu sebanyak 6 buah

8. Bilangan real t sehingga terdapat dengan tunggal tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi $x^2 + 2y^2 = 3z$ dan $x + y + z = t$ adalah ...
   a. $-\frac{9}{8}$
   b. $-\frac{7}{8}$
   c. $-\frac{5}{8}$
   d. $-\frac{3}{8}$

   Solusi:
   $$3t = 3x + 3y + 3z = 3x + 3y + x^2 + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{8}$$
   Agar memiliki penyelesaian tunggal maka haruslah $3t = -\frac{27}{8} \leftrightarrow t = -\frac{9}{8}$

9. Jika $(f \ o \ g)(x) = \frac{7x+3}{5x-9}$ dan $g(x) = 2x - 4$, maka nilai $f(1)$ adalah ....
   a. 4
   b. $\frac{41}{7}$
   c. 6
   d. $\frac{34}{7}$

   Solusi:
   $g(x) = 2x - 4$
   $(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{7x+3}{5x-9}$
   $f(2x - 4) = \frac{7x+3}{5x-9}$
   Misalkan $y = 2x - 4$ maka $x = \frac{y+4}{2}$
   $f(y) = \frac{7\left(\frac{y+4}{2}\right)+3}{5\left(\frac{y+4}{2}\right)-9} = \frac{7y+34}{5y+2}$
   Yang setara dengan
   $f(x) = \frac{7x+34}{5y+2}$
   $f(2) = \frac{7(1)+34}{5(1)+2} = \frac{41}{7}$
   ∴ Jadi, nilai $f(1)$ adalah $\frac{41}{7}$

10. Palindrom adalah bilangan yang sama dibaca dari depan atau dari belakang. Sebagai contoh 12321 dan 32223 merupakan palindrom. Palindrom 5 digit terbesar yang habis dibagi 303 adalah ...
    a. 47748
    b. 47784
    c. 47847
    d. 47874

    Solusi:
    Misalkan palindrom lima digit tersebut adalah $n = \overline{abcba} = 10001a + 1010b + 100c$. Karena habis dibagi $303 = 3 \times 101$ maka
    $$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a - c \equiv 0 \, mod \, 101$$
    dan
    $$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a + 2b + c \equiv 0 \, mod \, 3$$
    karena $2a - c \equiv 0 \, mod \, 101$ dan $-9 \leq 2a - c \leq 18$ maka $2a - c = 0 \Rightarrow c = 2a$. Agar n maksimal pilih $a = 4$. Akibatnya
    $$2a + 2b + c \equiv 0 \, mod \, 3 \Leftrightarrow 16 + 2b \equiv 0 \, mod \, 3 \Leftrightarrow b \equiv 1 \, mod \, 3$$
    maka nilai b terbesar adalah $b = 7$. Jadi, $n = 47874$