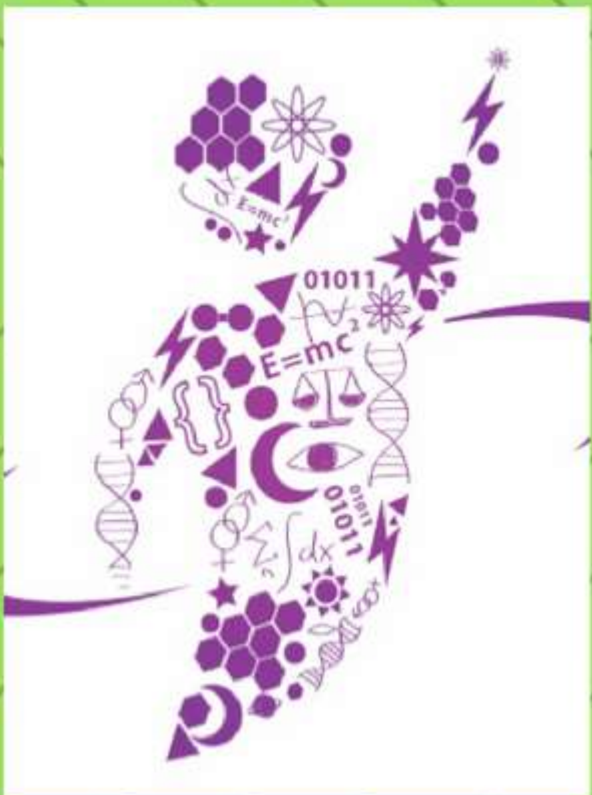
PAKET 5

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



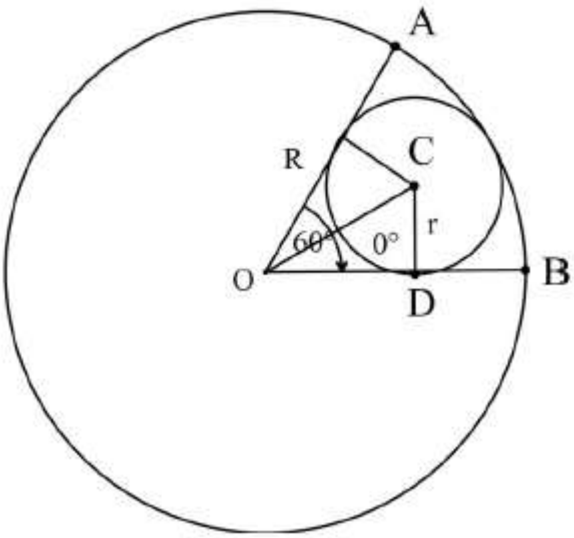
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 5

1. Titik-titik A dan B terletak pada lingkaran yang berpusat di O, dan $\angle AOB = 60°$. Lingkaran kedua menyinggung didalam lingkaran pertama dan menyinggung OA dan OB. Perbandingan luas antara lingkaran kecil (lingkaran kedua) dengan lingkaran besar (lingkaran pertama) adalah ….
   a. $2:8$
   b. $10:3$
   c. $9:2$
   d. $9:1$
   Solusi:



Misalkan :
R = jari-jari Lingkaran besar
r = jari-jari Lingkaran kecil
$\sin \angle COD = \frac{CD}{OC}$
$\sin 30° = \frac{r}{R-r}$
$\frac{1}{2} = \frac{r}{R-r}$
$R - r = 2r$
$R = 3r$
Maka perbandingan lingkaran kecil : lingkaran besar = 1 : 9

2. Diberikan bilangan real x dan y yang memenuhi $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2$. Nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah ….

a. 1
b. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
c. $1+\frac{3\sqrt{2}}{4}$
d. $1+\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Solusi:

Misal, $m = 2y - x$ dan $n = 2x - y$, maka diperoleh $x = \frac{2n+m}{3}$ dan $y = \frac{2m+n}{3}$

Sehingga,

$$\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2n+m}{2m+n} < 2 \Rightarrow m > 0, n > 0$$

Dan, diperoleh

$$f(x,y) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$$

$$\Rightarrow f(m,n) = \frac{2n+m}{3m} + \frac{2(2m+n)}{3n} = \frac{2n}{3m} + \frac{4m}{3n} + 1$$

Karena $m > 0$ dan $n > 0$, sehingga $\frac{m}{n} > 0$ dan $\frac{n}{m} > 0$, maka menurut $AM–GM$, diperoleh

$$\frac{\frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m}}{2} \geq \sqrt{\frac{2m}{3n} \cdot \frac{4n}{3m}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m} \geq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3n} + \frac{4n}{3m} + 1 \geq 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Jadi, nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah $1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

3. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan (n) sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n. Misal d adalah bilangan asli sehingga d habis membagi $n - s(n)$ untuk setiap bilangan asli n. Yang bukan merupakan d adalah ….
   a. 1
   b. 3
   c. 6
   d. 9

   Solusi:

   Perhatikan, bilangan asli n dapat dinyatakan sebagai

$$n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a2.10^2 + \cdots$$

maka jika $s(n)$ didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n, maka diperoleh

$$s(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Misal, $p = n - s(n)$, maka

$p = n - s(n)$

$p = (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a2.10^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)$

$p = a_0(10^0 - 1) + a_1(10^1 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \cdots$

$p = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots$

$p = 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \cdots)$

Sehingga, $9|n - s(n)$. Jadi bilangan asli d adalah faktor bulat positif dari 9, yaitu 1, 3, dan 9.

Jadi, yang bukan merupakan d adalah 6

4. Diberikan dua bilangan asli dua angka yang selisihnya 10. Diketahui bahwa bilangan yang kecil merupakan kelipatan 3, sedangkan lainnya merupakan kelipatan 7. Diketahui pula bahwa jumlah semua faktor prima kedua bilangan tersebut adalah 17. Jumlah dua bilangan tersebut adalah ….

   a. 120
   b. 130
   c. 140
   d. 150

   Solusi:

   Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y, karena x adalah bilangan kelipatan 7 dan y adalah bilangan kelipatan 3, maka untuk m dan n adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai

   $$x = 7m$$
   $$y = 3n$$

   Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan $x > y$, maka $x - y = 10$. Ini sama saja dengan persamaan $7m - 3n = 10$

   Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid, yaitu $7 = 2 \times 3 + 1$

   Sehingga, $1 = 7 - 2 \times 3$

   Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh $10 = 70 - 60$

   Sehingga, diperoleh $m = 10$ dan $n = 20$

   Sehingga, solusi umumnya adalah

   $$m = 10 - 3t \quad \Rightarrow \quad x = 70 - 21t$$
   $$n = 20 - 7t \quad \Rightarrow \quad y = 60 - 21t$$

   Diperoleh pasangan bilangan dua digit x, yang memenuhi adalah

   $$(x, y) = \{(28,18), (49,39), (70,60), (91,81)\}$$

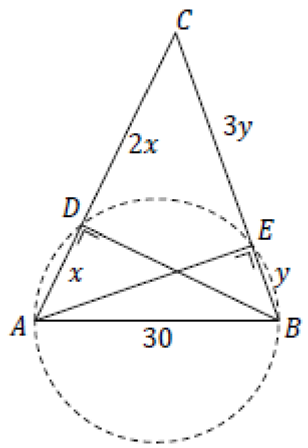
Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.
Sehingga, jelas diantara pasangan x, yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$ dan $y = 60$
Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$

5. Misalkan P adalah polinom berderajat 3 dengan $P(0) = k$, $P(1) = 2k$, dan $P(-1) = 3k$. Nilai $P(2) + P(-2)$ adalah …
   a. $5k$
   b. 0
   c. k
   d. $14k$

   Solusi:
   Misalkan: $P(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$
   $P(0) = d = k$
   $P(1) = a + b + c + d = 2k \quad \rightarrow \quad a + b + c = k \quad (1)$
   $P(-1) = -a + b - c + k = 3k \quad (2)$
   Jumlahkan persamaan (1) dan (2), didapat:
   $2b = 3k$
   $b = \frac{3}{2}k$
   $P(-2) = -82 + 4b - 2c + d$
   $P(2) = 8a + 4b + 2c + d$
   Jumlahkan, didapat:
   $P(-2) + P(2) = 8b + 2d$
   $P(-2) + P(2) = 8\left(\frac{3}{2}k\right) + 2k$
   $P(-2) + P(2) = 14k$

6. Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB. Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di D dan E. Jika $AB = 30, AD = \frac{1}{3}AC$, dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga ABC adalah ….
   a. 450
   b. 500
   c. 540
   d. 560

   Solusi:
   Perhatikan, gambar segitiga ABC dan lingkaran Γ



Misal,

$AD = x$, karena $AD = \frac{1}{3}AC$ maka $AC = 3AD$, sehingga $AC = 3x$, akibatnya $CD = 2x$

$BE = y$, karena $BE = \frac{1}{4}BC$ maka $BC = 4BE$, sehingga $BC = 4y$, akibatnya $CE = 3y$

Berdasarkan power of point diperoleh

$CD \times CA = CE \times CB$

$\Leftrightarrow 2x \times 3x = 3y \times 4y$

$\Leftrightarrow 6x^2 = 12y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 2y^2$

Luas ΔABC dapat dicari menggunakan sisi alas AC dan tinggi BD. Sehingga kita akan mencari AC dengan terlebih dahulu mencari nilai AD, lalu mencari BD dengan menggunakan aturan Pythagoras pada ΔABD.

BD dapat dicari dengan memandang aturan Pythagoras pada ΔABD dan ΔBDC, yaitu:

$BD^2 = BD^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$

$\Leftrightarrow 30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2$

$\Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$

$\Leftrightarrow 900 - x^2 = 8x^2 - 4x^2$

$\Leftrightarrow 900 = 5x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 180$

Sehingga, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - x^2} = \sqrt{900 - 180} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$

Mengingat $AD = x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, maka $AC = 3AD = 3x = 18\sqrt{5}$

Jadi, luas ΔABC adalah $L = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{5} \times 12\sqrt{5} = 108 \times 5 = 540$

7. Empat siswa Adi, Budi, Cokro, dan Dion bertanding balap sepeda. Kita hanya diberikan sebagian informasi sebagai berikut:
   (a) setiap siswa sampai di garis finish pada waktu yang berlainan
   (b) Adi bukan juara pertama
   (c) Cokro kalah dari Budi
   Dengan hanya mengetahui informasi ini saja, banyaknya susunan juara pertama, kedua, ketiga, dan keempat adalah ….
   a. 9
   b. 12
   c. 10
   d. 8
   Solusi:
   Batasan :
   - $A \neq B \neq C \neq D$
   - $A \neq 1$
   - $B < C$

Juara I	Juara II	Juara III	Juara IV
B	$P_3^3 = 6$		
D	B	C	A
D	B	A	C
D	A	B	C

$\}3$

   Jadi, banyaknya cara menentukan susunan juara pertama, kedua, ketiga, dan keempat adalah:
   $P_3^3 + 3 = 6 + 3 = 9$ cara

8. Himpunan S merupakan himpunan bilangan-bilangan 7 digit sehingga masing-masing angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, atau 7 tepat muncul satu kali. Bilangan-bilangan di S diurutkan mulai dari yang paling kecil sampai yang paling besar. Bilangan yang berapa pada urutan ke-2018 adalah ….
   a. 3671254
   b. 3671253
   c. 3671252
   d. 3671251
   Solusi:
   Pertama, kita akan memeriksa banyak bilangan dengan memeriksa digit pada tempat terbesar, yaitu tempat jutaan.
   • Bilangan 1XXXXXX menyumbang sebanyak 6!=720 bilangan. Jadi bilangan ke-1 sampai dengan bilangan ke-720 adalah berformat 1XXXXXX.

• Bilangan 2XXXXXX menyumbang sebanyak 6!=720 bilangan. Jadi bilangan ke-721 sampai dengan bilangan ke-1440 adalah berformat 2XXXXXX.
• Bilangan 3XXXXXX menyumbang sebanyak 6!=720 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-2160 adalah berformat 3XXXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 3XXXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat ratusan ribu.
• Bilangan 31XXXXX menyumbang sebanyak 5!=120 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-1560 adalah berformat 31XXXXX.
• Bilangan 32XXXXX menyumbang sebanyak 5!=120 bilangan. Jadi bilangan ke-1561 sampai dengan bilangan ke-1680 adalah berformat 32XXXXX.
• Bilangan 34XXXXX menyumbang sebanyak 5!=120 bilangan. Jadi bilangan ke-1681 sampai dengan bilangan ke-1800 adalah berformat 34XXXXX.
• Bilangan 35XXXXX menyumbang sebanyak 5!=120 bilangan. Jadi bilangan ke-1801 sampai dengan bilangan ke-1920 adalah berformat 35XXXXX.
• Bilangan 36XXXXX menyumbang sebanyak 5!=120 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 36XXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 36XXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat puluhan ribu.
• Bilangan 361XXXX menyumbang sebanyak 4!=24 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-1944 adalah berformat 361XXXX.
• Bilangan 362XXXX menyumbang sebanyak 4!=24 bilangan. Jadi bilangan ke-1945 sampai dengan bilangan ke-1968 adalah berformat 362XXXX.
• Bilangan 364XXXX menyumbang sebanyak 4!=24 bilangan. Jadi bilangan ke-1969 sampai dengan bilangan ke-1992 adalah berformat 364XXXX.
• Bilangan 365XXXX menyumbang sebanyak 4!=24 bilangan. Jadi bilangan ke-1993 sampai dengan bilangan ke-2016 adalah berformat 365XXXX.
• Bilangan 367XXXX menyumbang sebanyak 4!=24 bilangan. Jadi bilangan ke-2017 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 367XXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 367XXXX.

Selanjutnya akan diperiksa secara manual digit pada tempat ribuan.
• Bilangan 3671245 adalah bilangan ke-2017.
• Bilangan 3671254 adalah bilangan ke-2018.
Jadi, bilangan ke-2018 adalah 3671254

9. Untuk setiap bilangan real z, $\lfloor z \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan z. Jika diketahui $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$ dan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$. Nilai $(y - x)$ adalah ….
   a. 27,6
   b. 11,9
   c. 17,6
   d. 8,2

   Solusi:
   Perhatikan, misal $0 \leq \delta < 1$, maka untuk setiap z bilangan real berlaku: $z = \lfloor z \rfloor + \delta_z$
   Dari persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$, diperoleh
   $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$
   $\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$
   $\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$
   Sehingga diperoleh, $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$ dan $\delta_y = 0{,}8$
   Dan dari persamaan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$ diperoleh
   $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$
   $\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \delta_x + \lfloor y \rfloor + \delta_y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$
   $\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + \delta_y = 18{,}4$
   $\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + 0{,}8 = 18{,}4$
   $\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x = 17{,}6$
   Sehingga diperoleh $\lfloor y \rfloor = 17$, dan $\delta_x = 0{,}6$
   Perhatikan kembali bahwa $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$, sehingga diperoleh
   $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$
   $\Rightarrow \lfloor x \rfloor + 2(17) = 43$
   $\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 34 = 43$
   $\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 9$
   Jadi, diperoleh nilai x dan y adalah
   $$x = \lfloor x \rfloor + \delta_x = 9 + 0{,}6 = 9{,}6$$
   $$y = \lfloor y \rfloor + \delta_y = 17 + 0{,}8 = 17{,}8$$
   Jadi, nilai $y - x = 17{,}8 - 9{,}6 = 8{,}2$

10. Diberikan suku banyak $p(x)$ dengan $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$ untuk setiap bilangan real x. Jika $p(1) \neq 1$ maka jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah ….
   a. -120
   b. 121
   c. 120
   d. -121

Solusi:
Perhatikan, anggap $p(x) = ax^n + q(x), a \neq 0, q(x)$ suku banyak derajat k dengan $0 \leq k < n$, maka
$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$
$\Leftrightarrow \left(ax^n + q(x)\right)^2 + (a(x^2)n + q(x^2)) = 2x^2$
$\Leftrightarrow a^2x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + ax^{2n} + q(x^2) = 2x^2$
$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + q(x^2) = 2x^2$
Sehingga, dengan memperhatikan kesamaan di atas, maka kemungkinan yang terjadi adalah
• $(a^2 + a)x^{2n} = 2x^2$, maka $n = 1$ dengan $a^2 + a = 2$.
• $(a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) = 2x^2$, apabila $a^2 + a = 0$ maka $n + k = 2$.
Perhatikan, $n + k = 2 \Rightarrow k = 2 - n$, maka
$0 \leq k < n$
$\Rightarrow 0 \leq 2 - n < n$
$\Leftrightarrow n \leq 2 < 2n$
$\Leftrightarrow 1 < n \leq 2$
Jelas bahwa $n = 2$.
Jadi, suku banyak $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$, agar kesamaan berlaku maka
• $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
• $p(x)$ adalah suku banyak berderajat dua.

Kasus pertama, (x) adalah suku banyak berderajat satu.
Misal, $p(x) = ax + b, a \neq 0$, maka
$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$
$\Leftrightarrow (ax + b)^2 + (ax^2 + b) = 2x^2$
$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 + ax^2 + b = 2x^2$
$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^2 + 2abx + (b^2 + b) = 2x^2$
Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh
- $2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (tidak\ memenuhi)$ atau $b = 0$
- $a^2 + a = 2$
  $\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$
  $\Leftrightarrow (a + 2)(a - 1) = 0$
  $\Leftrightarrow a = -2$ atau $a = 1$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi hanya jika $b = 0$, sehingga
• Apabila $a = -2$, jadi (x) yang memenuhi adalah $p(x) = -2x$, sehingga karena $p(1) = -2 \neq 1$, maka $p(10) = -2(10) = -20$
• Apabila $a = 1$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = x$, sehingga karena $p(1) = 1$, dan mengingat $p(1) \neq 1$, maka $p(x) = x$ tidak memenuhi. Sehingga tidak ada nilai (10) yang memenuhi

Kasus kedua, (x) adalah suku banyak berderajat dua.
Misal, $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ maka
$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$
$\Leftrightarrow (ax^2 + bx + c)^2 + (ax^4 + bx^2 + c) = 2x^2$
$\Leftrightarrow a^2x^4 + ax^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 2acx^2 + bx^2 + 2bc\,x + c^2 + c = 2x^2$
$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + b)x^2 + 2bcx + (c^2 + c) = 2x^2$
Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

- $a^2 + a = 0$
  $\Rightarrow a(a + 1) = 0$
  $\Leftrightarrow a = 0\ (tidak\ memenuhi)$ atau $a = -1$
- $2ab = 0 \ \Rightarrow\ a = 0\ (tidak\ memenuhi)$ atau $b = 0$
- $b^2 + 2ac + b = 2$
  $\Rightarrow 2ac = 2$
  $\Leftrightarrow -2c = 2$
  $\Leftrightarrow c = -1$

Dari kasus ini (x) yang memenuhi adalah $p(x) = -x^2 - 1$, sehingga $p(10) = -(10)^2 - 1 = -101$
Jadi jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah $-20 - 101 = -121$