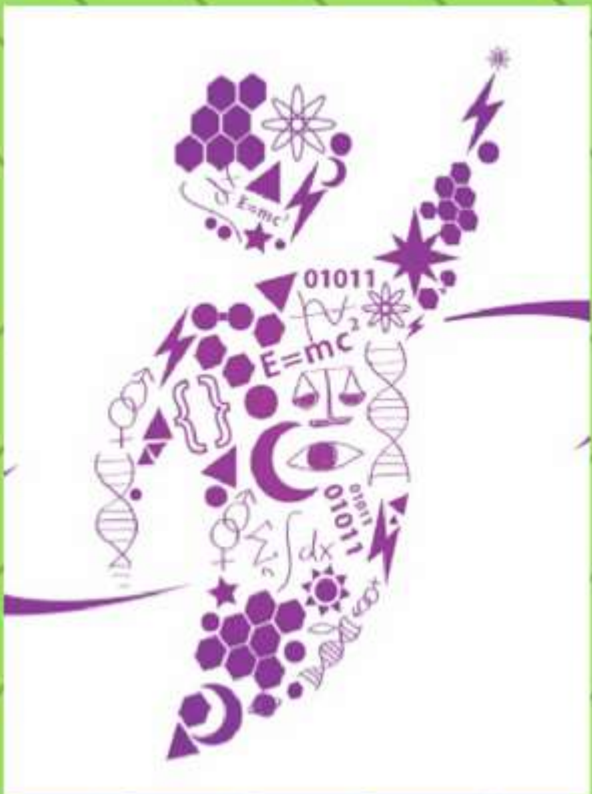
PAKET 4

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

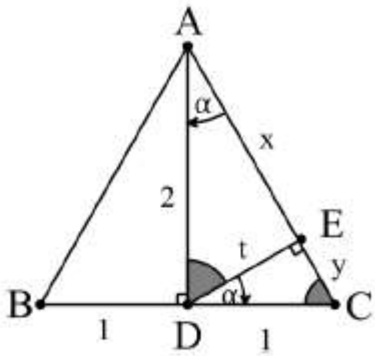
@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 4

1. Pada segitiga ABC sama kaki dengan puncak A, AD adalah garis tinggi dengan D pada sisi BC. Titik E adalah titik pada AC sehingga DE garis tinggi segitiga ADC. Jika $AD = 2$ dan $BC = 2$, maka nilai dari $AE : EC$ adalah ….
   a. 4
   b. 3
   c. 2
   d. 1

   Solusi:



Perhatikan ΔADE dan ΔCDE sebangun , maka :

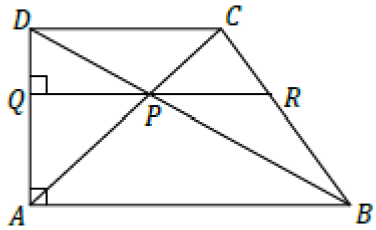
$$\frac{AE}{AD} = \frac{DE}{DC} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{t}{1} \rightarrow x = 2t$$

$$\frac{EC}{CD} = \frac{DE}{AD} \rightarrow \frac{y}{1} = \frac{t}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}t$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{x}{y} = \frac{2t}{\frac{1}{2}t} = 4$$

2. Misalkan $ABCD$ adalah trapesium siku-siku dengan AB sejajar DC $(\text{AB} > \text{DC})$ dan AB tegak lurus AD. Misalkan juga P adalah titik potong diagonal AC dan BD. Jika perbandingan luas segitiga APD dan luas trapesium $ABCD$ adalah 4 : 25 maka nilai $\frac{AB}{DC}$ adalah ….
   a. 3
   b. 4
   c. 1
   d. 2

Solusi:
Perhatikan trapesium $ABCD$ berikut.



P adalah titik potong diagonal AC dan BD.
Misal,

$$\frac{AB}{DC} = m \quad \Rightarrow \quad AB = m \cdot DC$$

Sehingga, dari perbandingan luas segitiga APD dan trapesium $ABCD$
diperoleh $\frac{[APD]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot PQ}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB+DC)}$

$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{AB+DC}$

$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC}$

Padahal, dari kesebangunan segitiga ABD dan segitiga CAB, diperoleh PQ=PR
Sedangkan, dari kesebangunan APQ dan ACD serta BPR dan BDC diperoleh.

$\frac{AQ}{DQ} = \frac{PQ}{DC - PQ} = \frac{AB - PR}{PR}$

Maka,

$PQ^2 = (DC - PQ)(AB - PQ)$

$\Rightarrow PQ^2 = (DC - PQ)(m \cdot DC - PQ)$

$\Leftrightarrow PQ^2 = m \cdot DC^2 - (1 + m) \cdot DC \cdot PQ + PQ^2$

$\Leftrightarrow (1 + m) \cdot DC \cdot PQ = m \cdot DC^2$

$\Leftrightarrow \frac{PQ}{DC} = \frac{m}{1+m}$

Sehingga,

$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC}$

$\Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{m}{(1+m)^2}$

$\Leftrightarrow 4(1 + m)^2 = 25m$

$\Leftrightarrow 4 + 8m + 4m^2 = 25m$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 17m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (4m - 1)(m - 4) = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ atau $m = 4$

Jadi, perbandingan $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{4}$ atau $\frac{AB}{DC} = 4$

Ingat bahwa di soal diketahui AB > DC, maka perbandingan yang memenuhi adalah $\frac{AB}{DC} = 4$

3. Parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu koordinat pada tepat empat titik. Keempat titik tersebut merupakan titik-titik sudut layang-layang dengan luas 24. Nilai $(a + b)^2$ adalah ....
   a. 9
   b. 7
   c. 5
   d. 3

   Solusi:
   Perhatikan, titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, -4)$. Sedangkan, titik potong parabola $y = 8 - bx^2$ pada sumbu Y adalah di titik $(0,8)$.
   Perhatikan juga, agar dapat diperoleh dua titik lagi sebagai titik-titik sudut layang-layang yang lain, maka titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ pada sumbu X seharusnya adalah pada titik yang sama, sehingga dapat disimpulkan kedua kurva berpotongan di sumbu X.
   Sehingga, titik potong di sumbu X dapat ditentukan dengan
   $y1 = y2$
   $\Leftrightarrow ax^2 - 4 = 8 - bx^2$
   $\Leftrightarrow (a + b)x^2 - 12 = 0$
   $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12}{a+b}}$
   Jadi, titik potong kedua parabola pada sumbu X adalah di titik $\left(\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$ dan $\left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$
   Padahal, luas layang-layang adalah 24, sehingga
   $L = 12 \times d_1 \times d_2$
   $\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times |8 - (-4)| \times \left|\sqrt{\frac{12}{a+b}} - \left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}\right)\right|$
   $\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{\frac{12}{a+b}}$
   $\Leftrightarrow 2 = \sqrt{\frac{12}{a+b}}$
   $\Leftrightarrow 4 = \frac{12}{a+b}$
   $\Leftrightarrow a + b = 3$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 9$

4. Bilangan prima terbesar yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a^4 + b^4 + 13$ untuk suatu bilangan-bilangan prima a dan b adalah ....
   a. 657
   b. 759
   c. 697
   d. 719

   Solusi:
   Perhatikan, teorema tentang bilangan prima yaitu,
   "Setiap bilangan prima p dan $p > 3$, maka p dapat dinyatakan sebagai $p = 6n \pm 1$, dengan n adalah bilangan asli".

   Untuk $a > 3, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$, maka
   $$a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (mod\ 3)$$

   Untuk $a = 2, b \leq 3$, maka
   $$a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (mod\ 5)$$
   Jadi untuk $a = 2, b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
   Begitu pula untuk $b = 2, a \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

   Untuk $a = b = 3$, maka
   $$a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (mod\ 5)$$
   Jadi untuk $a = b = 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

   Untuk $a = 2, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$, maka
   $$a^4 + b^4 + 13 \equiv 0 + 1 + 13 \equiv 14 \equiv 0 (mod\ 2)$$
   Jadi untuk $a = 2, b > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
   Begitu pula untuk $b = 2, a > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

   Untuk $a = 3, b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1, n \geq 1$,
   - Untuk $b = 6n + 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$.
     Disini, $a \neq 4$ sebab jika $a = 4$, maka b tak prima.
     Maka,
     $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) + 1)^4 + 13) \equiv ((a + 1)^4 + 4) \equiv 0\ (mod\ 5)$, untuk $a \neq 4$

- Untuk $b = 6n - 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$.
  Disini, $a \neq 1$ sebab jika $a = 1$, maka b tak prima, kecuali untuk $n = 1$
  Maka,
  $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) - 1)^4 + 13) \equiv ((a + 1)^4 - 1) \equiv 0 \ (mod\ 5)$,untuk $a \neq 1$
  Maka, solusi satu-satunya adalah jika $n = 1$, sehingga $a^4 + b^4 + 13$ adalah bilangan prima terbesar untuk $a = 3, b = 5$

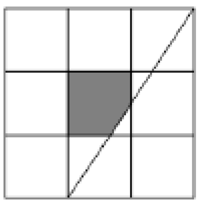
Jadi, $a^4 + b^4 + 13 = 3^4 + 5^4 + 13 = 81 + 625 + 13 = 719$

5. Jika $m = 2016^2 + 2^{2016}$, maka digit satuan dari $(m + 1)^2 + 2^{\frac{m}{2}}$ adalah ....
   a. 7
   b. 5
   c. 9
   d. 6

   Solusi:
   Mencari digit satuan sama halnya dengan mencari sisa pembagian oleh 10.
   $(m + 1)^2 \equiv (2016^2 + 2^{2016} + 1)^2 \ \ (mod\ 10)$
   $(m + 1)^2 \equiv (6 + 2^{4k} + 1)^2 \ \ (mod\ 10)$
   $(m + 1)^2 \equiv (6 + 6 + 1)^2 \ \ (mod\ 10)$
   $(m + 1)^2 \equiv 9 \ \ (mod\ 10)$

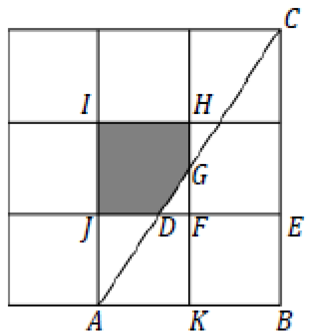
   $\frac{m}{2} \equiv \frac{2016^2 + 2^{2016}}{2} = 0 \ \ (mod\ 4) \ \ \rightarrow \ \ \frac{m}{2} = 4k$
   Akibatnya $2^{\frac{m}{2}} \equiv 2^{4k} \equiv 6 \ \ (mod\ 10)$
   Maka, $(m + 1)^2 + 2^{\frac{m}{2}} \equiv 9 + 6 \equiv 5 \ \ (mod\ 10)$

6. Diberikan persegi berukuran 3×3 satuan seperti pada gambar. Luas segilima yang diarsir adalah ....

   a. $\frac{11}{12}$
   b. $\frac{3}{5}$
   c. 1
   d. $\frac{9}{10}$

Solusi:



Perhatikan, karena $AB \parallel DE$, maka $\Delta CAB \sim \Delta CDE$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{CE}{CB} \times AB = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Sehingga, karena $DE = DF + FE$, dan $FE = 1$, maka diperoleh

$$DF = DE - FE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Perhatikan, karena $\Delta DFG \sim \Delta ABC$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{FG}{BC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow FG = \frac{DF}{AB} \times BC = \frac{\frac{1}{3}}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Jadi, $[DFG] = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

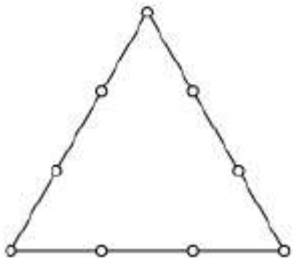
Sehingga, $[DGHIJ] = [FHIJ] - [DFG] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

7. Suatu bilangan asli mempunyai 2017 pembagi positif yang salah satu diantaranya adalah 7. Bilangan yang dimaksud adalah …
   a. 7^{2016}
   b. 14^{1008}
   c. 2017^{7}
   d. 7^{2017}

   Solusi:
   Misal bilangan tersebut adalah $a = 7^{x}$
   Bilangan 2017 adalah prima, maka dapat disimpulkan bahwa : $(x + 1) = 2017 \rightarrow \ x = \ 2016$
   Jadi, bilangan yang dimaksud hanyalah 7^{2016}

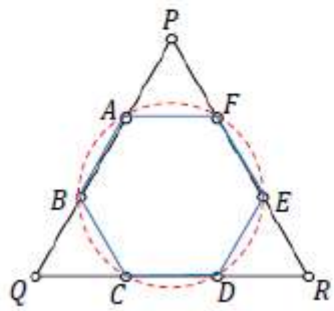
8. Diberikan sembilan titik pada bidang yang membentuk segitiga sama sisi seperti pada gambar. Pada tiap sisi, dua titik yang bukan titik sudut segitiga membagi sisi menjadi tiga bagian sama panjang. Kesembilan titik ini akan diwarnai masing-masing dengan warna merah atau biru. Peluang bahwa dari

kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah ….



a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{2}{3}$
c. 1
d. $\frac{1}{3}$

Solusi:
Perhatikan gambar berikut!



Dari keenam titik yang bukan titik sudut segitiga dapat dibuat sebuah lingkaran yang di dalamnya terdapat segienam beraturan.
Sepasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan dapat membentuk garis yang merupakan diameter lingkaran, yaitu AD,, dan CF.
Sehingga, apabila sepasang titik sudut yang berhadapan memiliki warna yang sama, maka jika satu titik dipilih dari empat titik yang lain pada lingkaran berwarna sama, maka jelas tiga titik berwarna sama tersebut akan terbentuk segitiga siku-siku. Ingat kembali bahwa sudut keliling yang menghadap ke diameter lingkaran pastilah siku-siku.
Sekarang, coba perhatikan bahwa kondisi terburuk yang mungkin terjadi adalah dua pasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan memiliki warna berbeda. Misalnya, A dan D berwarna merah, sedangkan B dan E berwarna biru, maka jika satu saja titik yang lain dari C atau F diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

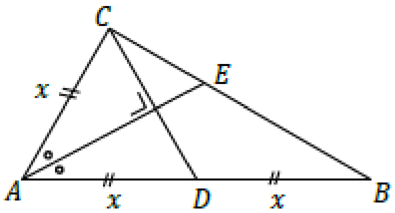
Kondisi terburuk lain yang mungkin terjadi adalah A,B,C dan D,E,F berlainan warna, maka jika satu saja titik sudut segitiga Q,R diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna. Sehingga peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah 1.

9. Setiap kotak pada papan catur berukuran $n \times n$ akan diwarnai dengan tiga warna. Pewarnaan dilakukan dengan syarat bahwa setiap kotak berukuran 1×3 atau 3×1 mempunyai 3 warna yang berbeda. Banyaknya cara pewarnaan yang berbeda adalah …
   a. 24
   b. 18
   c. 12
   d. 28

   Solusi:
   Asumsikan $\geq\ 3$, maka dapat dicari pemilihan warna :
   Pada Baris 1 Kolom 1 $= \ C_1^3 = 3$
   Pada Baris 1 Kolom 2 $= \ C_1^2 = 2$
   Pada Baris 2 Kolom 1 $= \ C_1^2 = 2$
   Sedangkan untuk baris dan kolom berikutnya akan selalu mengikuti pola tersebut. Sehingga banyak cara pewarnaan adalah $3 \times 2 \times 2 = 12$

10. Panjang sisi-sisi dari segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan. Diketahui bahwa garis berat dari segitiga tegak lurus dengan salah satu garis baginya. Sisi terpanjang segitiga itu adalah ….
    a. 6
    b. 5
    c. 4
    d. 3

    Solusi:



CD merupakan garis berat dan AE merupakan garis bagi, keduanya berpotongan saling tegak lurus.
Perhatikan segitiga ADC sama kaki, sehingga $AD = AC$. Misal $AD = AC = DB = x$.

Perhatikan juga, karena sisi-sisi segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan, maka selisih dari dua sisi segitiga adalah 1 atau 2.
Kasus pertama, selisih dua sisi segitiga adalah 1, sehingga $2x - x = 1 \Rightarrow x = 1$
Karena $x = 1$, maka $b = 1, c = 2$, sehingga
• $a = 0$, tidak memenuhi karena sisi segitiga tidak mungkin nol
• $a = 3$, tidak mungkin karena tidak memenuhi ketaksamaan $b + c > a$
Kasus kedua, selisih dua sisi segitiga adalah 2, sehingga $2x - x = 2 \Rightarrow x = 2$
Karena $x = 2$, maka $b = 2, c = 4$, sehingga
• $a = 3$, memenuhi.
Sehingga, sisi segitiga adalah $a = 3, b = 2, c = 4$

Jadi, sisi terpanjang segitiga tersebut adalah 4