PAKET 14

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
FISIKA

po.alcindonesia.co.id

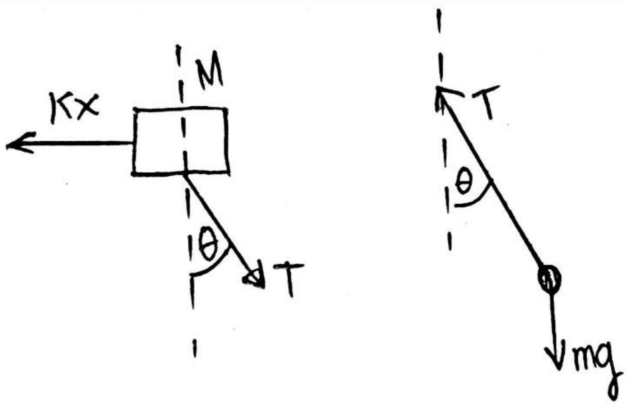
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 14

1. Mula-mula, sistem disimpangkan terlebih dahulu. Asumsikan massa M disimpangkan ke kanan sebesar x dan massa m disimpangkan ke kanan juga sebesar θ. Perhatikan diagram benda bebas dibawah ini.



Terdapat asumsi untuk penyederhanaan kasus, yaitu $\frac{g}{L} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$. Bentuk persamaan gerak sistem.

Tinjau M

$$F_{pemulih} = M\ddot{x}$$
$$T\sin\theta - kx = M\ddot{x}$$
$$T\theta - kx = M\ddot{x}$$

Tinjau m
Persamaan Torsi

$$\tau_{pemulih} = I\ddot{\theta}$$
$$-T\sin\theta\, L - m\ddot{x}L = mL^2\ddot{\theta}$$
$$-T\theta - m\ddot{x} = mL\ddot{\theta}$$

Persamaan gaya radial

$$T = mg\cos\theta + m\ddot{x}\sin\theta$$
$$T = mg + m\ddot{x}\theta$$

Setelah mendapatkan persamaan gerak, nyatakan $\ddot{x}(x,\theta)$ dan $\ddot{\theta}(x,\theta)$

Persamaan
(1) $T\theta - kx = M\ddot{x}$
(2) $-T\theta - m\ddot{x} = mL\ddot{\theta}$
(3)$T = mg + m\ddot{x}\theta$

Persamaan (3)➔(1)=(4)

$$(mg + m\ddot{x}\theta)\theta - kx = M\ddot{x}$$

$$mg\theta - kx = M\ddot{x}$$

Persaamaan (4) ➔ (3)➔(2)

$$L\ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{M} + 1\right) g\theta + \frac{k}{M}x$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopel adalah

$$\ddot{x} = \frac{m}{M} g\theta - \frac{k}{M}x$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L}\theta + \frac{k}{ML}x$$

Asumsikan bahwa

$$x = A_x e^{i\omega t}$$

$$\theta = A_\theta e^{i\omega t}$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopek dapat disederhanakan menjadi

Persamaan gerak $\ddot{x}$

$$-A_x\omega^2 e^{i\omega t} = \frac{m}{M} g A_\theta e^{i\omega t} - \frac{k}{M} A_x e^{i\omega t}$$

$$0 = A_x\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right) + \frac{m}{M} g A_\theta$$

Persamaan gerak $\ddot{\theta}$

$$-A_\theta\omega^2 e^{i\omega t} = -\left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L} A_\theta e^{i\omega t} + \frac{k}{ML} A_x e^{i\omega t}$$

$$0 = A_\theta\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L}\right) + \frac{k}{ML} A_x$$

Persamaan tereduksi menjadi

$$0 = A_x\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right) + \frac{m}{M} g A_\theta$$

$$0 = A_\theta\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L}\right) + \frac{k}{ML} A_x$$

Ubah persamaan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{M} & \frac{m}{M} g \\ \frac{k}{ML} & \omega^2 - \left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$BA = 0$$

Berdasarkan teori, disimpulkan bahwa

$$|B| = 0$$

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M} + 1\right)\frac{g}{L}\right) - \left(\frac{m}{M} g\right)\left(\frac{k}{ML}\right) = 0$$

Gunakan penyederhanaan $\frac{g}{L} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$

$$\left(\omega^2-\frac{k}{M}\right)\left(\omega^2-\frac{3}{2}\frac{k}{M}\right)-\frac{1}{2}\frac{k^2}{M^2}=0$$
$$\omega^4-\frac{5}{2}\frac{k}{M}\omega^2+\frac{3}{2}\frac{k^2}{M^2}-\frac{1}{2}\frac{k^2}{M^2}=0$$
$$\omega^4-\frac{5}{2}\frac{k}{M}\omega^2+\frac{k^2}{M^2}=0$$
$$\omega_{1,2}^2=\frac{\frac{5}{2}\frac{k}{M}\pm\sqrt{\frac{25}{4}\frac{k^2}{M^2}-4\frac{k^2}{M^2}}}{2}=\frac{(5\pm 3)}{4}\frac{k}{M}$$

Frekuensi angular minimum adalah

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{2M}}$$

(a)

2. Frekuensi angular maksimum adalah

$$\omega_2=\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

(b)

3. Subtitusi ada persamaan matriksnya

$$\begin{pmatrix}\omega^2-\frac{k}{M} & \frac{m}{M}g\\ \frac{k}{ML} & \omega^2-\left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_\theta\end{pmatrix}=0$$
$$\begin{pmatrix}\frac{k}{2M}-\frac{k}{M} & \frac{m}{M}g\\ \frac{k}{ML} & \frac{k}{2M}-\left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_\theta\end{pmatrix}=0$$
$$-\frac{k}{2M}A_x+\frac{m}{M}gA_\theta=0$$
$$A_x=\frac{2mg}{k}A_\theta$$

Maka, besar simpangan untuk memenuhi frekuensi angular 1 adalah

$$(A_x,A_\theta)=\left(\frac{2mg}{k},1\right)$$

Satuan A_θ dalam radian.
(a)

4. Subtitusi ada persamaan matriksnya

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{M} & \frac{m}{M}g \\ \frac{k}{ML} & \omega^2 - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{M} - \frac{k}{M} & \frac{m}{M}g \\ \frac{k}{ML} & \frac{k}{2M} - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{2k}{M}A_x + \frac{m}{M}gA_\theta = 0$$

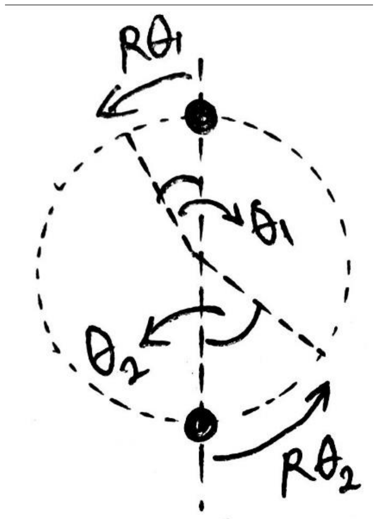
$$A_x = -\frac{mg}{2k}A_\theta$$

Maka, besar simpangan untuk memenuhi frekuensi angular 1 adalah

$$(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{mg}{2k}, 1\right)$$

Satuan A_θ dalam radian.
(e)

5. Mula-mula, sistem disimpangkan terlebih dahulu. Massa 1 disimpangkan sebesar $R\theta_1$ dan massa 2 disimpangkan sebesar $R\theta_2$. Perhatikan diagram dibawah ini.



Asumsikan bahwa $R\theta_2 > R\theta_1$, untuk mengetahui arah gaya pegas. Persamaan gerak sistem.

Tinjau benda 1

$$F_{pemulih} = mR\ddot{\theta}_1$$

$$kR(\theta_2 - \theta_1) + kR(\theta_2 - \theta_1) = mR\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{2k}{m}\theta_2 - \frac{2k}{m}\theta_1 = \ddot{\theta}_1$$

Tinjau benda 2

$$F_{pemulih} = mR\ddot{\theta}_2$$

$$-kR(\theta_2 - \theta_1) - kR(\theta_2 - \theta_1) = mR\ddot{\theta}_2$$
$$-\frac{2k}{m}\theta_2 + \frac{2k}{m}\theta_1 = \ddot{\theta}_2$$

Asumsikan bahwa

$$\theta_n = A_n e^{i\omega t}$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopel dapat disederhanakan menjadi

Simpangan θ_1

$$\frac{2k}{m}A_2 e^{i\omega t} - \frac{2k}{m}A_1 e^{i\omega t} = -A_1\omega^2 e^{i\omega t}$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)A_1 + \frac{2k}{m}A_2 = 0$$

Simpangan θ_2

$$-\frac{2k}{m}A_2 e^{i\omega t} + \frac{2k}{m}A_1 e^{i\omega t} = -A_2\omega^2 e^{i\omega t}$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)A_2 + \frac{2k}{m}A_1 = 0$$

Bentuk persamaan diatas menjadi matriks

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{m} & \omega^2 - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$BA = 0$$

Berdasarkan teori, disimpulkan bahwa

$$|B| = 0$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)^2 - \left(\frac{2k}{m}\right)^2 = 0$$
$$\omega^2 - \frac{2k}{m} = \pm\frac{2k}{m}$$
$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \pm \frac{2k}{m}$$

Maka, frekuensi angular mode minimum adalah $\omega = 0$ (bermakna bahwa sistem bukan merupakan osilasi terkopel, melainkan osilasi sederhana karena hanya mempunyai satu nilai untuk ω).

(e)

6. Frekuensi angular maksimum adalah

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(b)

7. Subtitusi pada persamaan matriksnya

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{m} & \omega^2 - \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$A_1 = A_2$$

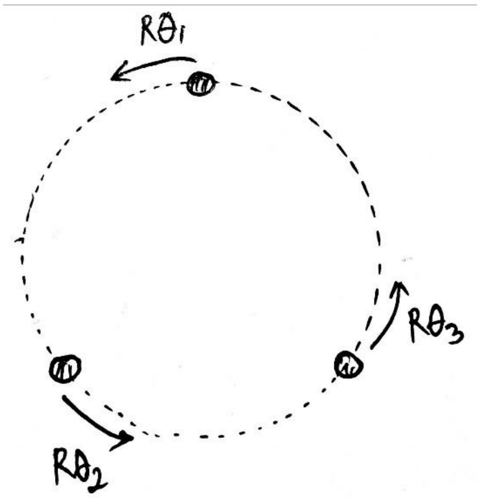
Maka, besar simpangan agar osilasi harmonik adalah
$$(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$$
(a)

8. Subtitusi pada persamaan matriksnya

$$\begin{pmatrix} \frac{4k}{m} - \frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{m} & \frac{4k}{m} - \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$A_1 = -A_2$$

Maka, besar simpangan agar osilasi harmonik adalah
$$(\theta_1, \theta_2) = (-1, 1)$$
(b)

9. Mula-mula, sistem disimpangkan terlebih dahulu. Massa 1 disimpangkan sebesar $R\theta_1$ dan massa 2 disimpangkan sebesar $R\theta_2$ dan massa 3 disimpangkan sebesar $R\theta_3$. Perhatikan diagram dibawah ini.



Asumsikan bahwa $R\theta_3 > R\theta_2 > R\theta_1$, untuk mengetahui arah gaya pegas. Bentuk persamaan gerak sistem.

Tinjau benda 1

$$F_{pemulih} = mR\ddot{\theta}_1$$
$$kR(\theta_2 - \theta_1) + kR(\theta_3 - \theta_1) = mR\ddot{\theta}_1$$
$$-\frac{2k}{m}\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2 + \frac{k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_1$$

Tinjau benda 2

$$F_{pemulih} = mR\ddot{\theta}_2$$
$$-kR(\theta_2 - \theta_1) + kR(\theta_3 - \theta_2) = mR\ddot{\theta}_2$$
$$\frac{k}{m}\theta_1 - \frac{2k}{m}\theta_2 + \frac{k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_2$$

Tinjau benda 3

$$F_{pemulih} = mR\ddot{\theta}_3$$
$$-kR(\theta_3 - \theta_1) - kR(\theta_3 - \theta_2) = mR\ddot{\theta}_3$$
$$\frac{k}{m}\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2 - \frac{2k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_2$$

Asumsikan bahwa

$$\theta_n = A_n e^{i\omega t}$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopel dapat disederhanakan menjadi

Simpangan θ_1

$$-\frac{2k}{m}\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2 + \frac{k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_1$$
$$-\frac{2k}{m}A_1 e^{i\omega t} + \frac{k}{m}A_2 e^{i\omega t} + \frac{k}{m}A_3 e^{i\omega t} = -A_1\omega^2 e^{i\omega t}$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)A_1 + \frac{k}{m}A_2 + \frac{k}{m}A_3 = 0$$

Simpangan θ_2

$$\frac{k}{m}\theta_1 - \frac{2k}{m}\theta_2 + \frac{k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_2$$
$$\frac{k}{m}A_1 e^{i\omega t} - \frac{2k}{m}A_2 e^{i\omega t} + \frac{k}{m}A_3 e^{i\omega t} = -A_2\omega^2 e^{i\omega t}$$
$$\frac{k}{m}A_1 + \left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)A_2 + \frac{k}{m}A_3 = 0$$

Simpangan θ_2

$$\frac{k}{m}\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2 - \frac{2k}{m}\theta_3 = \ddot{\theta}_1$$
$$\frac{k}{m}A_1 e^{i\omega t} + \frac{k}{m}A_2 e^{i\omega t} - \frac{2k}{m}A_3 e^{i\omega t} = -A_3\omega^2 e^{i\omega t}$$
$$\frac{k}{m}A_1 + \frac{k}{m}A_2 + \left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)A_3 = 0$$

Bentuk persamaan diatas menjadi matriks

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$BA = 0$$

Berdasarkan teori, disimpulkan bahwa $|B| = 0$. Kita akan gunakan metode sarrus untuk menyelesaikan matriks 3×3.

$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)^3 + \left(\frac{k}{m}\right)^3 + \left(\frac{k}{m}\right)^3 - \left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) = 0$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)^3 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^3 - 3\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) = 0$$
$$\omega^6 - \frac{6k}{m}\omega^4 + 9\frac{k^2}{m^2}\omega^2 = 0$$
$$\omega^2\left(\omega^4 - \frac{6k}{m}\omega^2 + 9\frac{k^2}{m^2}\right) = 0$$

Diketahui bahwa salah satu dari tiga frekuensi angular bernilai

$$\omega = 0$$

Persamaan kuadrat

$$\omega^4 - \frac{6k}{m}\omega^2 + 9\frac{k^2}{m^2} = 0$$
$$\omega^2 = \frac{\frac{6k}{m} \pm \sqrt{36\frac{k^2}{m^2} - 4\left(9\frac{k^2}{m^2}\right)}}{2} = \frac{3k}{m}$$

Persamaan kudrat frekuensi angular mempunyai akar-akar yang sama

$$\omega^4 - \frac{6k}{m}\omega^2 + 9\frac{k^2}{m^2} = \left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right)$$

Maka, dapat disimpulkan bahwa

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

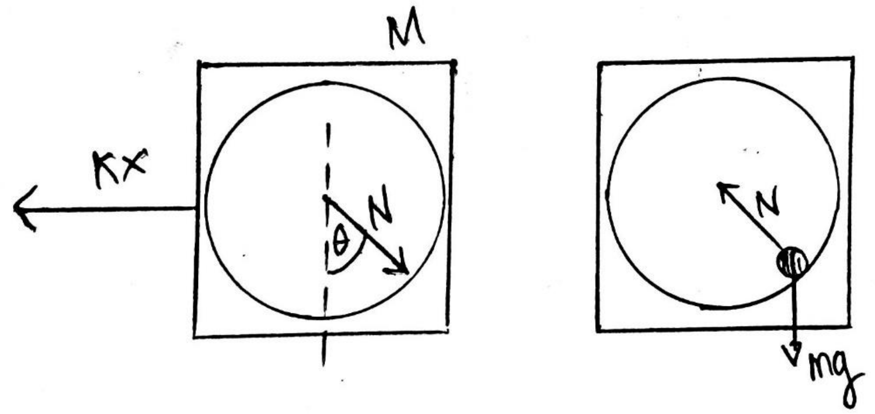
Maka, frekuensi angular mode minimum adalah $\omega = 0$ (bermakna bahwa sistem bukan merupakan osilasi terkopel, melainkan osilasi sederhana karena hanya mempunyai satu nilai untuk ω).

Maka, $\omega_1 = 0$
(e)

10. $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
(c)

11. $\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
(c)

12. Mula-mula, sistem disimpangkan terlebih dahulu. Asumsikan massa M disimpangkan ke kanan sebesar x dan massa m disimpangkan ke kanan juga sebesar θ. Perhatikan diagram benda bebas dibawah ini. Sebenarnya, soal ini analog dengan soal awal, hanya berbeda gaya saja.



Terdapat asumsi untuk penyederhanaan kasus, yaitu $\frac{g}{L} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$. Bentuk persamaan gerak sistem.

Tinjau M

$$F_{pemulih} = M\ddot{x}$$
$$N\sin\theta - kx = M\ddot{x}$$
$$N\theta - kx = M\ddot{x}$$

Tinjau m
Persamaan Torsi

$$\tau_{pemulih} = I\ddot{\theta}$$
$$-N\sin\theta\, L - m\ddot{x}L = mL^2\ddot{\theta}$$
$$-N\theta - m\ddot{x} = mL\ddot{\theta}$$

Persamaan gaya radial

$$N = mg\cos\theta + m\ddot{x}\sin\theta$$
$$N = mg + m\ddot{x}\theta$$

Setelah mendapatkan persamaan gerak, nyatakan $\ddot{x}(x,\theta)$ dan $\ddot{\theta}(x,\theta)$

Persamaan
(1) $N\theta - kx = M\ddot{x}$
(2) $-N\theta - m\ddot{x} = mL\ddot{\theta}$
(3)$N = mg + m\ddot{x}\theta$

Persamaan (3)→(1)=(4)

$$(mg + m\ddot{x}\theta)\theta - kx = M\ddot{x}$$
$$mg\theta - kx = M\ddot{x}$$

Persamaan (4) → (3)→(2)

$$L\ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{M}+1\right)g\theta + \frac{k}{M}x$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopel adalah

$$\ddot{x} = \frac{m}{M}g\theta - \frac{k}{M}x$$
$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\theta + \frac{k}{ML}x$$

Asumsikan bahwa

$$x = A_x e^{i\omega t}$$
$$\theta = A_\theta e^{i\omega t}$$

Maka, persamaan gerak harmonik terkopek dapat disederhanakan menjadi

Persamaan gerak $\ddot{x}$

$$-A_x\omega^2 e^{i\omega t} = \frac{m}{M}gA_\theta e^{i\omega t} - \frac{k}{M}A_x e^{i\omega t}$$
$$0 = A_x\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right) + \frac{m}{M}gA_\theta$$

Persamaan gerak $\ddot{\theta}$

$$-A_\theta \omega^2 e^{i\omega t} = -\left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}A_\theta e^{i\omega t} + \frac{k}{ML}A_x e^{i\omega t}$$
$$0 = A_\theta\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\right) + \frac{k}{ML}A_x$$

Persamaan tereduksi menjadi

$$0 = A_x\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right) + \frac{m}{M}gA_\theta$$
$$0 = A_\theta\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\right) + \frac{k}{ML}A_x$$

Ubah persamaan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k}{M} & \frac{m}{M}g \\ \frac{k}{ML} & \omega^2 - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_\theta \end{pmatrix} = 0$$
$$BA = 0$$

Berdasarkan teori, disimpulkan bahwa

$$|B| = 0$$
$$\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega^2 - \left(\frac{m}{M}+1\right)\frac{g}{L}\right) - \left(\frac{m}{M}g\right)\left(\frac{k}{ML}\right) = 0$$

Gunakan penyederhanaan $\frac{g}{L} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega^2 - \frac{3}{2}\frac{k}{M}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{M^2} = 0$$
$$\omega^4 - \frac{5}{2}\frac{k}{M}\omega^2 + \frac{3}{2}\frac{k^2}{M^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{M^2} = 0$$
$$\omega^4 - \frac{5}{2}\frac{k}{M}\omega^2 + \frac{k^2}{M^2} = 0$$
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{5}{2}\frac{k}{M} \pm \sqrt{\frac{25}{4}\frac{k^2}{M^2} - 4\frac{k^2}{M^2}}}{2} = \frac{(5 \pm 3)}{4}\frac{k}{M}$$

Frekuensi angular minimum adalah

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2M}}$$

(a)

13. Frekuensi angular maksimum adalah

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

(b)