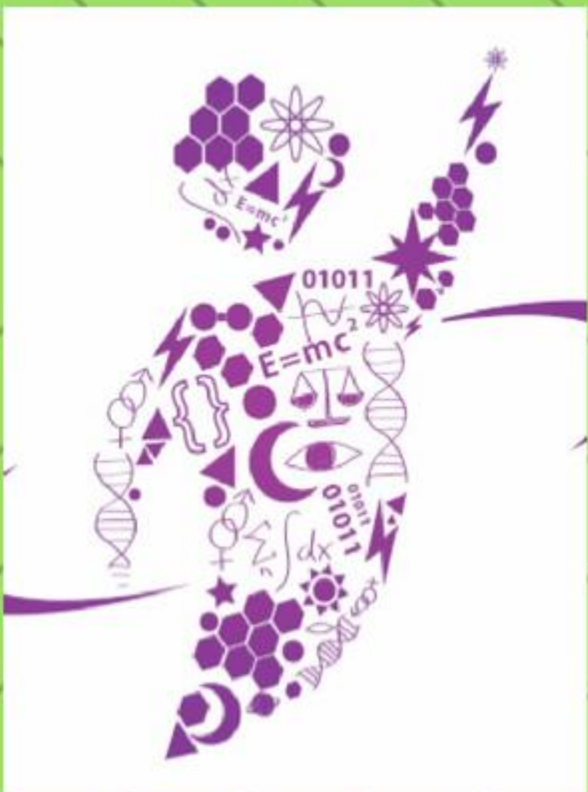
PAKET 14

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
FISIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

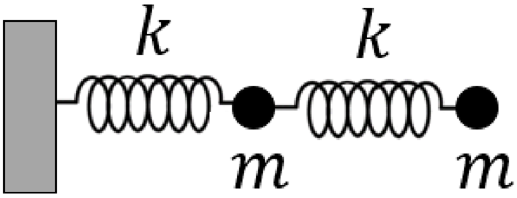
@ALCINDONESIA

085223273373

OSILASI TERKOPEL (COUPLED OSCILLATIONS)

Osilasi terkopel merupakan osilasi yang melibatkan lebih dari satu benda. Perbedaan yang signifikan antara osilasi sederhana dengan osilasi terkopel adalah terdapat lebih dari satu jenis parameter gerak pada osilasi terkopel. Banyak cara untuk menyelesaikan persamaan gerak osilasi terkopel. Namun, metode matriks merupakan cara yang cukup umum digunakan. Saya akan jelaskan osilasi terkopel melalui soal beserta prosedur menyelesaikannya.

Terdapat sebuah sistem osilasi pada bidang datar yang terdiri atas pegas dan massa. Perhatikan gambar dibawah ini. . Asumsikan benda kiri adalah benda 1 dan benda kanan adalah benda 2.



Sistem kemudian diberikan simpangan x_1 untuk benda kiri dan x_2 untuk benda kanan. Tentukan frekuensi angular tiap mode dan besar simpangannya agar kedua benda berosilasi harmonik.

JAWABAN
Dalam osilasi terkopel, besar simpangan untuk tiap parameter gerak, dalam hal ini x_1 dan x_2 tidak boleh sembarang, ada aturannya. Jika simpangannya sembarang, mereka berdua tidak berosilasi harmonik. Perhatikan diagram benda bebas dibawah ini.
(gambar)
Dalam mengerjakan osilasi terkopel, terutama jika pegasnya lebih dari satu, kita harus membentuk sebuah asumsi bahwa simpangan $x_2 > x_1$ ataupun sebaliknya. Hal ini bertujuan agar kita tahu arah gaya pegasnya.

Persamaan Newton

Benda 1

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

Benda 2

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

Kenapa harus $x_n = A_n e^{i\omega t}$? Karena kita sedang memanipulasi persamaan gerak menjadi persamaan yang lebih mudah. Persamaan eksponensial merupakan *eigen function*, yaitu fungsi yang dapat menjadi dirinya kembali (kembali seperti mula-mula, *eigen* = sama). Perhatikan persamaan differensial dibawah ini (notasi i memiliki arti sama dengan $\sqrt{-1}$).

$$x_n = A_n e^{i\omega t}$$
$$\dot{x}_n = A_n i\omega e^{i\omega t}$$
$$\ddot{x}_n = -A_n \omega^2 e^{i\omega t}$$

Terbukti bahwa eksponensial merupakan *eigen function*, karena dapat menjadi fungsi yang sama seperti mula-mula. Selain $x_n = A_n e^{i\omega t}$, kita juga dapat menggunakan fungsi trigonometrik untuk $\sin\theta$ maupun $\cos\theta$. Karena fungsi tersebut akan berulang pada differensial yang keduakalinya.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1)$$
$$-A_1\omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{k}{m}A_1 e^{i\omega t} + \frac{k}{m}\left(A_2 e^{i\omega t} - A_1 e^{i\omega t}\right)$$
$$0 = A_1\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) + \frac{k}{m}A_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$$
$$-A_2\omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{k}{m}\left(A_2 e^{i\omega t} - A_1 e^{i\omega t}\right)$$
$$0 = A_2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m}A_1$$

Kita dapat nyatakan persamaan diatas dalam bentuk matriks (saya harap kalian sudah mengerti matriks dengan baik, sehingga tidak perlu dibahas disini).

$$0 = A_1\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right) + \frac{k}{m}A_2$$
$$0 = A_2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m}A_1$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

Untuk menyederhanakan persamaan matriks, asumsikan

$$B \equiv \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Maka, persamaan menjadi

$$BA = 0$$

Terdapat 2 solusi untuk nilai matriks A, yaitu

- Solusi Trivial
  Solusi trivial adalah solusi yang tidak berarti/tidak bermakna (ignorable, negligible). Contohnya saja persamaan diatas dapat terpenuhi jika matriks $A = 0$. Namun, dengan menyatakan $A = 0$, tidak dapat menyelesaikan persamaan.

- Solusi non-Trivial
  Solusi non-trivial adalah solusi yang berarti dan bermakna untuk menyelesaikan persamaan osilasi terkopel, dengan syarat matriks $A \neq 0$.

Kita akan menggunakan solusi non-trivial untuk menyelesaikan persamaan. Dengan mengetahui bahwa pada solusi non-trivial $A \neq 0$, maka matriks B tidak mempunyai invers. Berikut penjelasan mengapa matriks B tidak boleh mempunyai invers (notasi invers adalah B^{-1}).

$$BA = 0$$
$$B^{-1}BA = 0(B^{-1})$$
$$A = 0$$

Hal tersebut tidak boleh terjadi, maka kseimpulannya adalah matriks B tidak boleh mempunyai invers.

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \times B_{adjoin}$$

Agar matriks B tidak mempunyai invers, maka $|B| = 0$.

Sehingga, persamaan dapat diselesaikan jika determinan dari matriks B mempunyai nilai 0

$$|B| = 0$$

Kembali lagi kepada kasus osilasi terkopel. Kita mengetahui bahwa

$$B = \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Maka,

$$|B| = 0$$
$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m}\right) = 0$$
$$\omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$$

Maka, terdapat dua mode osilasi, yaitu $\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 + \sqrt{5}\right)$ dan $\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 - \sqrt{5}\right)$

Setelah kita mendapatkan frekuensi angular tiap mode, selanjutnya mencari besar simpangan tertentu untuk masing-masing mode.

MODE 1

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 + \sqrt{5}\right) - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 + \sqrt{5}\right) - \frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3 + \sqrt{5}\right) - \frac{2k}{m}\right)A_1 + \frac{k}{m}A_2 = 0$$
$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}A_1 + A_2 = 0$$
$$A_1 = -\frac{2}{\sqrt{5} - 1}A_2$$

Maka, simpangan untuk mode 1 adalah

$$(A_1, A_2) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5} - 1}, 1\right)$$

MODE 2

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3-\sqrt{5}\right)-\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3-\sqrt{5}\right)-\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3-\sqrt{5}\right)-\frac{2k}{m}\right)A_1+\frac{k}{m}A_2=0$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}A_1+A_2=0$$

$$A_1=\frac{2}{\sqrt{5}+1}A_2$$

Maka, simpangan untuk mode 1 adalah

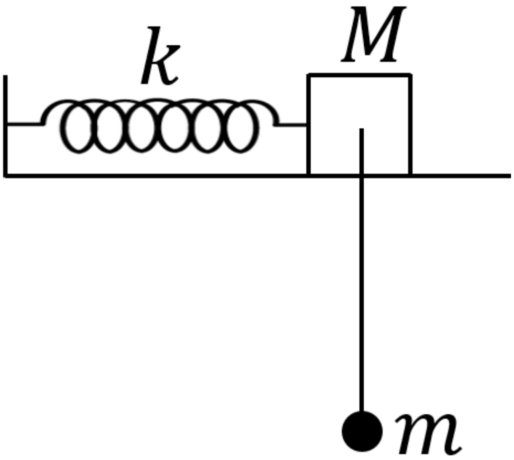
$$(A_1,A_2)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1},1\right)$$

Hasil simpangan akan berupa vektor/perbandingan.

SOAL

Untuk nomor 1-4

Terdapat sebuah sistem terkopel seperti gambar dibawah ini



Massa m merupakan massa titik yang diikatkan dengan tali sepanjang L yang tersangkut pada massa M. Sistem tersebut diberikan simpangan untuk masing-masing massa, simpangan sebesar x untuk M dan θ untuk m. Diketahui bahwa $\frac{g}{L} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$ dan sistem licin sempurna. Asumsikan sudut θ kecil.

1. Tentukan frekuensi angular mode minimum
   a. $\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
   b. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
   c. $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$
   d. $\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$
   e. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

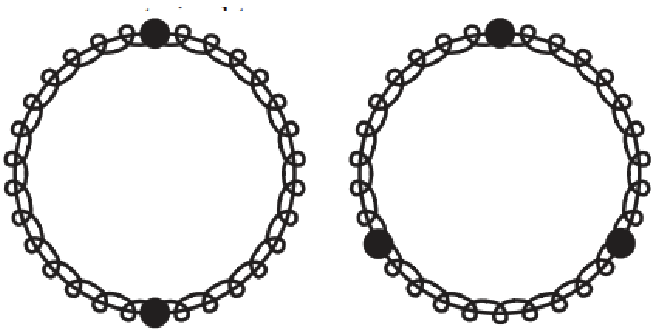
2. Tentukan frekuensi angular mode maksimum
   a. $\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
   b. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
   c. $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$
   d. $\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$

e. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

3. Tentukan besar simpangan untuk x dan θ pada mode minimum agar harmonik
   a. $(A_x, A_\theta) = \left(\frac{2mg}{k}, 1\right)$
   b. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{2mg}{3k}, 1\right)$
   c. $(A_x, A_\theta) = \left(\frac{3mg}{2k}, 1\right)$
   d. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{mg}{k}, 1\right)$
   e. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{mg}{2k}, 1\right)$

4. Tentukan besar simpangan untuk x dan θ pada mode maksimum agar harmonik
   a. $(A_x, A_\theta) = \left(\frac{2mg}{k}, 1\right)$
   b. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{2mg}{3k}, 1\right)$
   c. $(A_x, A_\theta) = \left(\frac{3mg}{2k}, 1\right)$
   d. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{mg}{k}, 1\right)$
   e. $(A_x, A_\theta) = \left(-\frac{mg}{2k}, 1\right)$

Untuk nomor 5-11
Terdapat sebuah sistem terkopel seperti gambar dibawah ini.



Mula-mula, sistem hanya terdiri dari 2 massa identik yang saling bersebrangan, yaitu m. Masing-masing massa dihubungkan oleh pegas identik dengan konstanta sebesar k. Kemudian, massa disimpangkan sebesar θ_1 dan θ_2 (sudut dihitung dari perubahan posisi massa).

5. Tentukan frekuensi angular mode minimum

a. $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{2m}}$

b. $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

c. $\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}$

d. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

e. $\omega = 0$

6. Tentukan frekuensi angular mode maksimum

a. $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{2m}}$

b. $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

c. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

d. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

e. $\omega = 0$

7. Tentukan besar simpangan untuk θ_1 dan θ_2 pada mode minimum agar harmonik

a. $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$

b. $(\theta_1, \theta_2) = (-1, 1)$

c. $(\theta_1, \theta_2) = (\sqrt{2}, -1)$

d. $(\theta_1, \theta_2) = (1, -\sqrt{2})$

e. $(\theta_1, \theta_2) = (1, 2)$

8. Tentukan besar simpangan untuk θ_1 dan θ_2 pada mode maksimum agar harmonik

a. $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$

b. $(\theta_1, \theta_2) = (-1, 1)$

c. $(\theta_1, \theta_2) = (\sqrt{2}, -1)$

d. $(\theta_1, \theta_2) = (1, -\sqrt{2})$

e. $(\theta_1, \theta_2) = (1, 2)$

Lalu, sistem diberi massa tambahan yang identik juga dengan massa m. Diketahui bahwa akan dihasilkan tiga mode beserta frekuensi angularnya, yaitu ω_1, ω_2 dan ω_3.

9. Jika $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, tentukan besar ω_1.

a. $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{2m}}$
b. $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$
c. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
d. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
e. $\omega = 0$

10. Tentukan besar ω_2
    a. $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{2m}}$
    b. $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$
    c. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
    d. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
    e. $\omega = 0$

11. Tentukan besar ω_3
    a. $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{2m}}$
    b. $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$
    c. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
    d. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
    e. $\omega = 0$

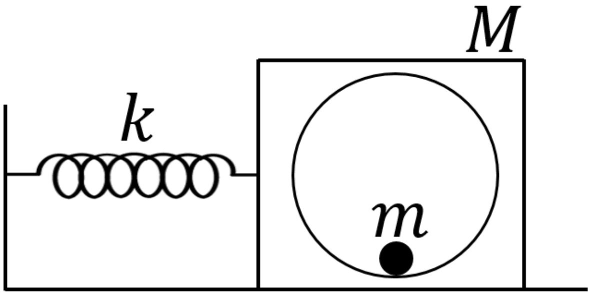
Metode Sarrus
Jika ingin mencari determinan matriks 3×3, dapat menggunakan metode Sarrus

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = (B_{11}B_{22}B_{33}) + (B_{12}B_{23}B_{31}) + (B_{13}B_{21}B_{32}) - (B_{13}B_{22}B_{31}) + (B_{11}B_{23}B_{32}) + (B_{12}B_{21}B_{33})$$

Untuk nomor 12 dan 13

Terdapat sebuah sistem yang terkopel seperti gambar dibawah ini.



Massa m merupakan massa titik yang terletak pada lingkaran berjari-jari R yang merupakan bagian dari massa M. Sistem tersebut diberikan simpangan untuk masing-masing massa, simpangan sebesar x untuk M dan θ untuk m. Diketahui bahwa $\frac{g}{R} = \frac{k}{M}$ dan $M = 2m$ dan sistem licin sempurna. Asumsikan sudut θ kecil.

12. Tentukan frekuensi angular mode minimum
    a. $\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
    b. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
    c. $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$
    d. $\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$
    e. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

13. Tentukan frekuensi angular mode maksimum
    a. $\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$
    b. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
    c. $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$
    d. $\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$
    e. $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$