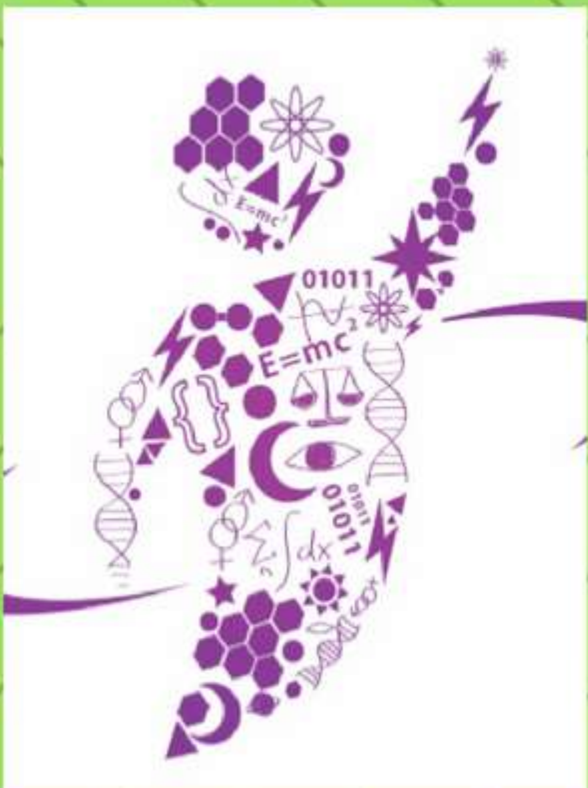
**PAKET 12**

# PELATIHAN ONLINE

# 2019

**SMA**
**FISIKA**

po.alcindonesia.co.id




**WWW.ALCINDONESIA.CO.ID**

**@ALCINDONESIA**

**085223273373**

# MEKANIKA BENDA LANGIT II

HUKUM KEPLER

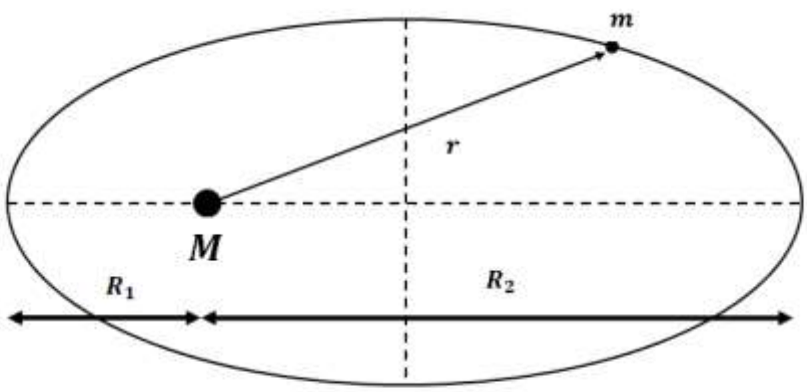
Hukum 1
"Setiap planet bergerak dengan lintasan elips dan Matahari berada di salah satu titik fokusnya"

Titik fokus merupakan pusat massa dari sistem tersebut. Sehingga, sistem berevolusi terhadap pusat massa.

Hukum 2
"Luas daerah yang disapu pada selang waktu yang sama akan selalu sama"

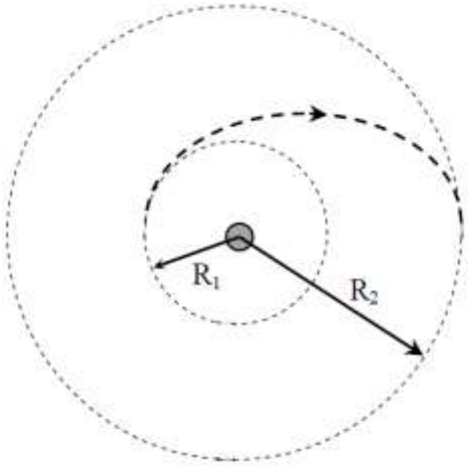
Hukum 3
Periode kuadrat suatu planet berbanding dengan pangkat tiga jarak rata-ratanya dari Matahari

Berikut merupakan diagram lintasan benda orbit

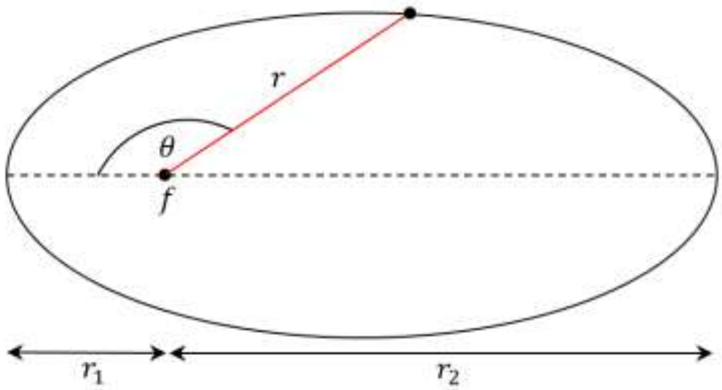



Dalam orbit elips, dikenal definisi perihelion dan aphelion. Perhielion merupakan jarak terdekat dari titik fokus ke benda yang mengorbit $R_1$. Sedangkan aphelion merupakan jarak terjauh dari titik fokus ke benda yang mengorbit $R_2$.

TRANSFER ORBIT HOHMANN
Transfer Hohmann adalah transfer dimana benda yang akan berpindah orbitnya hanya diberi pertambahan kecepatan tanpa adanya perubahan arah. Berikut merupakan diagram perpindahan orbitnya.




Semula yang tadinya mengorbit dengan radius $R_1$ berpindah menuju radius yang lebih besar, yaitu $R_2$. Dengan teoreman Hohmann, kita dapat mengetahui kecepatan untuk setiap saat pada lintasan elips (Karena pada lintasan elips, kecepatan berubah-ubah). Hal yang perlu diperhatikan adalah kekekalan momentum angular dan kekekalan energi mekanik. Sebenarnya, kalian juga tidak perlu untuk mempelajari teorema ini (teorema ini sangat penting pada olimpiade astronomi). Tidak perlu karena kita bisa menurunkan rumusnya sendiri dengan 2 konsep fisika diatas.




Jika kalian mencari energi total di lintasan bersifat konstan, yaitu

$$E_t = -\frac{GMm}{2a}$$

Dimana $M$ merupakan massa yang di orbit, $m$ merupakan massa yang mengorbit dan $a$ merupakan sumbu semi mayor. Maka, dengan menggunakan kekekalan energi mekanik, kita dapat mengetahui kecepatan di jarak $r$ dari titik fokus.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$v(r) = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

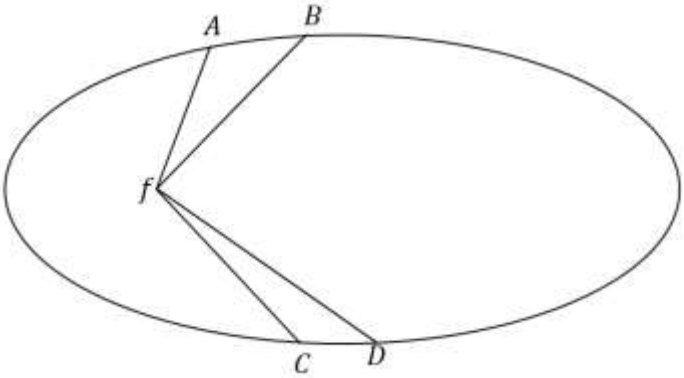
Persamaan diatas merupakan persamaan universal untuk lintasan (elips dan lingkaran) dan disebut sebagai teorema Hohmann.

PERIODE ELIPS

Terkait dengan gerak orbit, terdapat juga periode orbit (waktu yang digunakan untuk mengorbit 1 kali lintasan penuh). Kita akan mencari periode orbit untuk lintasan elips (universal).

Asumsikan perihelion adalah $r_1$ dan aphelion adalah $r_2$. Titik $f$ merupakan titik fokus. Berdasarkan hukum Kepler 2, yaitu

$$\frac{A_1}{T_1} = \frac{A_2}{T_2}$$




$$\frac{A_{fAB}}{T_{fAB}} = \frac{A_{fCD}}{T_{fCD}}$$

Kita akan buat luasan tersebut infinitesimal (sangat kecil), sehingga kita akan dapatkan persamaan differensial. Luasan yang infinitesimal akan terlihat seperti luasan segitiga sama kaki $\Delta$. Aproksimasi panjang: $fA \approx fB = r_1$ dan $fC \approx fD = r_2$. Aproksimasi sudut: $\sin\theta_{AfB} \approx \theta_{AfB}$ dan $\sin\theta_{CfD} \approx \theta_{CfD}$. Asumsikan $\theta_{AfB} = \theta_1$ dan $\theta_{CfD} = \theta_2$

$$fAB \approx \Delta fAB = \frac{1}{2}(fA)(fB)\sin\theta_{AfB} = \frac{1}{2}r_1^2\theta_{AfB}$$

$$fCD \approx \Delta fCD = \frac{1}{2}(fC)(fD)\sin\theta_{CfD} = \frac{1}{2}r_2^2\theta_{CfD}$$

$$\frac{\frac{1}{2}r_1^2\theta_{AfB}}{t_{fAB}} = \frac{\frac{1}{2}r_2^2\theta_{CfD}}{t_{fCD}}$$

$$\frac{1}{2}r_1^2\frac{\theta_1}{t_1} = \frac{1}{2}r_2^2\frac{\theta_2}{t_2}$$

$$\frac{1}{2}r_1^2\frac{d\theta_1}{dt_1} = \frac{1}{2}r_2^2\frac{d\theta_2}{dt_2}$$

$$\frac{1}{2}r_1^2\omega_1 = \frac{1}{2}r_2^2\omega_2$$
$$\frac{1}{2}r_1 v_1 = \frac{1}{2}r_2 v_2$$

Maka dapat disimpulkan persamaan diatas dalam persamaan differensial

$$\frac{dA}{dT} = \frac{1}{2}r\,v(r)$$

Gunakan $v(r)$ pada teorema Hohmann

$$\frac{dA}{dT} = \frac{1}{2}r\sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$

Untuk mendapatkan periode untuk 1 kali lintasan, kita harus gunakan $dA$ adalah luas elips penuh dan $dT$ adalah periodenya. Luas elips adalah matematikan besarnya $\pi ab$, dimana $a$ merupakan sumbu semi mayor dan $b$ merupakan sumbu semi minor.

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_1 r_2}$$

Maka, periode 1 kali lintasan penuh

$$\frac{\pi \frac{r_1 + r_2}{2}\sqrt{r_1 r_2}}{T} = \frac{1}{2}r\sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

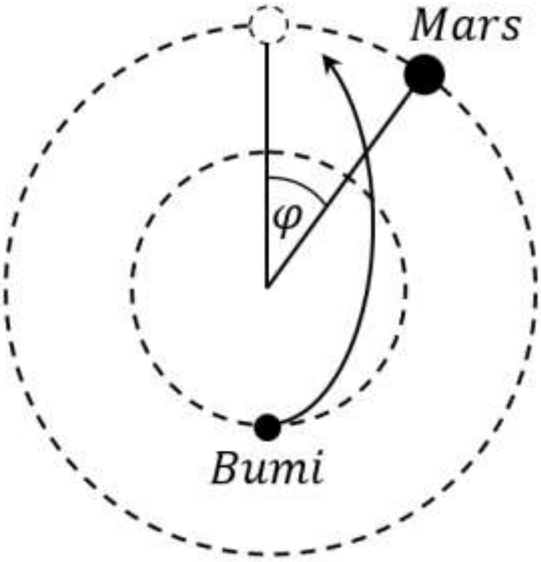
Sebenarnya, jika kita selesaikan kasus ini dengan sangat general dimana titik fokusnya berada pada pusat massa, akan didapatkan periode yang yang berbeda dengan diatas (metode untuk mendapatkan periode sama seperti diatas). Akan ada perbedaan pada massanya, yaitu menjadi massa campuran.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$
$$\mu = G(M+m)$$

**SOAL**

Untuk nomor 1 dan 2

Sebuah satelit bernama PADANG-2018 mula mula mengorbit Bumi dimana Bumi juga mengorbit Matahari dengan radius $R_1$. Disamping itu, terdapat planet Mars yang mengorbit Matahari juga dengan radius $R_2$. Anggap tidak ada efek gravitasi antar masing masing planet dan satelit. Gravitasi hanya diperoleh dari Matahari. Radius orbit satelit terhadap Bumi $r$ dimana $r \ll R_1$ dan $r \ll R_2$. Kerjakan dalam metode Hohmann.




1. Tentukan $\varphi$ (posisi Mars) dalam derajat jika satelit berpindah dari $R_1$ menuju $R_2$ dan langsung menabrak Mars (tanpa harus menunggu).

   a. $\varphi = \pi\left(\frac{R_1+R_2}{8R_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

   b. $\varphi = \frac{\pi}{8}(R_1+R_2)^3\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

   c. $\varphi = 2\pi\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

   d. $\varphi = \pi\left(\frac{R_2-R_1}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}$

   e. $\varphi = \pi$

Dalam proses transfer orbit satelit, Bumi tidak diam ditempat melainkan tetap bergerak dengan kecepatan orbitnya terhadap Matahari. Namun satelit diam ditempat di posisi dia menabrak Mars.

2. Tentukan lama satelit harus menunggu (menunggu di titik tabrakan dengan Mars) agar saat transfer orbit menuju $R_1$ langsung menabrak Bumi.

   a. $t = \pi\left(1 - 4\left(\frac{R_2-R_1}{8R_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$

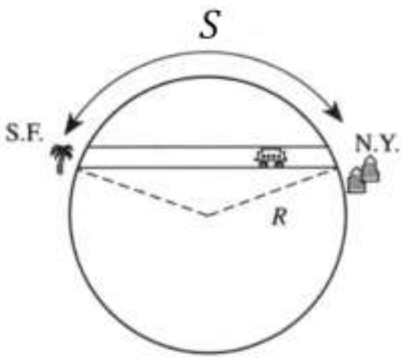
b. $t = 2\pi\left(1 - \left(\frac{R_1+R_2}{8R_2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$

c. $t = \pi\left(2 + \frac{1}{8}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{R_1^3+R_2^3}{GM}}$

d. $t = \pi\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{3}{2}} rad\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$

e. $t = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{R_1-R_2}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{2R_1^3}{GM}}$

3. Terowongan lurus dgali dari San Fransisco menuju New York, dimana jarak sesungguhnya jika tidak digali terowongan adalah $S$. Sebuah massa $m$ diluncurkan dari keadaan diam di kota new York. Lalu, massa $m$ akan sampai ke kota San Fransisco dengan waktu sebesar $T$. Tentukan $T$ jika keseluruhan sistem licin sempurna. Diketahui $g = \frac{GM}{R^2}$.




a. $T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

b. $T = \pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}$

c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

d. $T = \pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

e. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})R}{g}}$

Untuk nomor 4-6

Terdapat sebuah satelit yang mempunyai orbit lingkaran dengan radius $R_0$ dari pusat Bumi. Suatu ketika, satelit mengalami penambahan kecepatan sebesar $\Delta v$ arah pusat orbit. Diketahui, mula-mula, satelit mengorbit bumi dengan kecepatan $v_0$. Terdapat suatu kondisi dimana

$$\frac{\Delta v}{v_0} < 1$$

4. Tentukan sudut $\alpha$ yang dibentuk oleh semi mayor terhadap posisi satelit saat penambahan $\Delta v$.
   a. $30°$
   b. $60°$
   c. $65°$
   d. $90°$
   e. $120°$

5. Tentukan periode orbit baru
   a. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{R_0}{1-\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$
   b. $T = \frac{\pi}{\sqrt{2GM}}\left(\frac{2R_0}{1-\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$
   c. $T = \frac{\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{2R_0}{1+\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$
   d. $T = \frac{\pi}{\sqrt{GM}}(R_0)^{\frac{3}{2}}$
   e. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3GM}}\left(\frac{2R_0}{1+\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

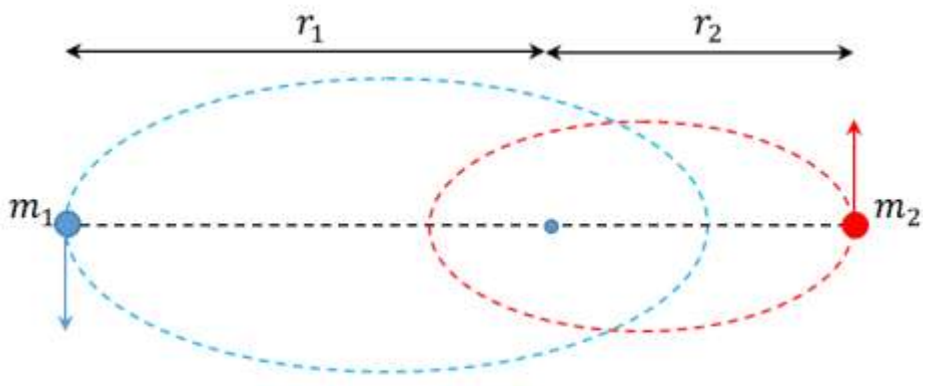
6. Tentukan $\Delta v$ minium agar mencapai *escape velocity*.
   a. $\Delta v = \frac{4}{3}v_0$
   b. $\Delta v = \frac{1}{2}v_0$
   c. $\Delta v = \frac{2}{3}v_0$
   d. $\Delta v = \frac{3}{2}v_0$
   e. $\Delta v = v_0$

7. Benda bermassa $m$ ingin keluar dari pengaruh gravitasi Bumi dengan melakukan perjalanan yang kecepatnnya merupakan *escape velocity*. Tentukan *escape velocity* dari Bumi jika bermassa $M$ dan beradius $R$.
   a. $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$
   b. $v = \sqrt{\frac{2G(M-m)}{R}}$
   c. $v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$

d. $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

e. $v = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R}}$

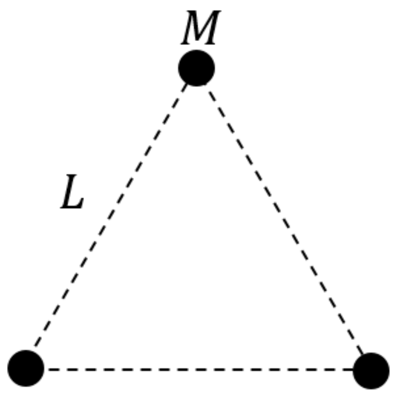
Terdapat sebuah sistem bintang ganda yang massanya tidak dapat diabaikan, yaitu $m_1$ dan $m_2$. Dua bintang ini mengorbit pusat massa mereka dengan lintasan elips. Aphelion dari $m_1$ adalah $r_1$ dan aphelion dari $m_2$ adalah $r_2$.




8. Tentukan periode lintasan penuh $m_1$
   a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}}$
   b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{8G(m_1+m_2)}}$
   c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{8G(m_1+m_2)}}$
   d. $T = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{Gm_1}}$
   e. $T = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{Gm_2}}$

9. Tentukan periode lintasan penuh $m_2$
   a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}}$
   b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{8G(m_1+m_2)}}$
   c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{8G(m_1+m_2)}}$
   d. $T = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{Gm_1}}$
   e. $T = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{Gm_2}}$

10. Terdapat sebuah bintang tiga yang mengorbit pusat massanya. Bintang ini membentuk segitiga sama sisi dengan panjang sisi $L$ dan identik dengan massa $M$. Tentukan kecepatan orbitnya.




a. $v = \sqrt{\frac{3GM}{L}}$
b. $v = \sqrt{\frac{2GM}{3L}}$
c. $v = 3\sqrt{\frac{GM}{L}}$
d. $v = \sqrt{\frac{GM}{2L}}$
e. $v = \sqrt{\frac{GM}{L}}$